# P1- Cálculo II

Engenharia Fácil

#OlhaoBizu

---

Fala galera! Hoje a equipe do Engenharia Fácil veio trazer um resumão dos assuntos mais importantes da prova de Cálculo II que vocês vão fazer, pra vocês mandarem super bem! Vamos ser bem rápidos e abordar os temas que mais costumam cair nas provas. Lembrando que, pelo que os professores falaram, nessa P1 não cairá superfícies. Qualquer dúvida, só falar com a gente pelo nosso site **www.engenhariafacil.net** que faremos de tudo pra tirar sua dúvida!

**Os bizus de hoje serão:** Resolução de EDOs de Segunda Ordem e Funções Vetoriais.

***Bora lá?***

## 1 Resolução de EDOs de Segunda Ordem

EDOs de segundo grau são que envolvem as derivadas segundas, assim, sempre que a gente encontrar algo do tipo $Ay'' + By' + Cy = F(x)$, nós teremos um método para achar que é y. É simples, vamos analisar, e no final criar um algoritmo que resolve todas as questões! Saca só!

A solução geral de uma EDO é formada pela soma de duas soluções: a homogênea e a particular.

A solução homogênea é bem simples de resolver, só substituir o y'' por um $r^2$, o y' por r e y por 1 , igualar a zero e resolver a equação do 2° grau.Esse polinômio é chamado de polinômio característico de uma EDO.

Para o exemplo (I) , $y'' - 5y' + 6y = xe^x$ nós teremos $r^2 - 5r + 6 = 0$.

A solução geral vai ser dada por:

- Se as raízes forem reais e distintas ($\Delta > 0$), teremos que a solução será:

$$y_{particular} = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$$

Sendo A e B constantes e $r_1$ *e* $r_2$ as raízes da equação.

- Se as raízes forem reais e iguais ($\Delta = 0$), a solução vai ser:

$$y_{particular} = (A + Bx)e^{r_1 x}$$

Sendo A e B constantes e $r_1$ a raiz da equação.

- Já se as raízes forem complexas ($\Delta < 0$):

$$y_{particular} = e^{\alpha x}(Acos(\beta x) + Bcos(\beta x))$$

Sendo A e B constantes, $\alpha$ parte real da raíz e $\beta$ a parte imaginária da raiz.

Maneiro!! Daí a gente já encontra a solução homogênea. Agora só falta a particular pra acabar a questão.

"Só". Os professores gostam de pegar pesado nessas questões, com questões trabalhosas, a discursiva do semestre passado, por exemplo, foi gigaaaante. Ao chegar aqui tome bastante cuidado para não errar continha besta.

Aqui tem algumas regrinhas, que não são difíceis de sacar, mas muitas vezes é melhor decorar do que pensar na hora.

As regrinhas básicas são:

**S**e a gente tiver uma EDO do tipo:

$$EDO = Polinômio\ de\ grau\ n$$

- ✓ A solução particular deve ser um **polinômio de grau n.**

***Ex:***

$$y'' - 5y' + 6y = t$$

Logo, a solução particular deve ser do tipo :

$$y_p = a + bt$$

Só jogar na EDO, vemos ter:

$$y_p{}'' = 0$$

$$y_p{}' = b$$

Logo:

$$y'' - 5y' + 6y = -5b + 6(a + bt) = t$$

$$-5b + 6a + 6bt = t$$

E então...

$$6bt = t \ , b = \frac{1}{6}$$

$$6a - 5b = 0$$

$$a = \frac{5}{6}b \ , \ a = \frac{5}{36}$$

Logo a solução particular é $y_p = \frac{1}{6}(\frac{5}{6} + t)$. Para achar a geral, você sabe né? Só somar com a homogênea.

**S**e a EDO for do tipo: **EDO= sen(x) ou EDO=cos(x) ou EDO= sen(x) + cos(x).**

- ✓ A solução será do tipo **Asen(x) +Bcos(x)**.

***Ex:***

$$y'' - 2y' + y = sen(3x + 1) + \cos(3x + 1)$$

Como vimos, qual será a solução particular?

$$y_p = Asen(3x + 1) + \ Bcos(3x + 1)$$

Substituindo na EDO pra achar as constantes, temos:

$$y_p{}' = 3Acos(3x+1) - 3Bsen(3x+1)$$

$$y_p{}'' = -9Asen(3x+1) - 9Bcos(3x+1)$$

Somando tudo, temos:

$$y'' - 2y' + y = \\ = -9Asen(3x+1) - 9Bcos(3x+1) - 2\big(3Acos(3x+1) - 3Bsen(3x+1)\big) \\ + Asen(3x+1) + Bcos(3x+1) =$$

$$= sen(3x+1) + \cos(3x+1)$$

Daí, só isolarmos $sen(3x+1)$ *e o* $cos(3x+1)$ e fazer o sistema linear.

$$sen(3x+1)(-9A + 6B + A) + cos(3x+1)(-9B - 6A + B) \\ = sen(3x+1) + cos(3x+1)$$

$$-8A + 6B = 1$$

$$-8B - 6A = 1$$

$$B = \frac{1 + 8A}{6}$$

$$-\frac{8(1+8A)}{6} - 6A = 1$$

$$-\frac{4}{3} - \frac{32A}{3} - \frac{18A}{3} = 1$$

$$-4 - 50A = 3$$

$$A = -\frac{7}{50}\,, B = -\frac{1}{50}$$

Logo:

$$y_p = \frac{1}{50}(-7sen(3x+1) - 1\cos(3x+1))$$

**E** se tiver o caso do tipo: $EDO = C.e^{\alpha x}$ ?

✓ Daí é tranquilo! A nossa solução será do tipo $Ae^{\alpha x}$.

***Ex:***

$$\boldsymbol{y'' - 2y' + y = 7e^{2x}}$$

Como vimos, a solução será do tipo $y_p = Ae^{2x}$.

Substituindo na EDO, temos:

$$y_p^{''} = 4Ae^{2x} \quad ; \quad y_p^{'} = 2Ae^{2x} \quad ; \quad y_p = Ae^{2x}$$

$$4Ae^{2x} - 2.2Ae^{2x} + Ae^{2x} = \mathbf{7e^{2x}} \rightarrow A = 7$$

$$Logo, a\ solução\ particular\ será\ y_p = 7e^{2x}$$

Beleza, mas vamos diretamente agora às exceções, que é o que geralmente o IM cobra em provas.

Se tivermos uma soma de tipos diferentes, a solução particular será a soma das soluções particulares de como se elas tivessem "*sozinhas*". **Como assim?**

Bora ver no exemplo:

$$y'' - 2y' + y = 4sen(x) + x^2 - 1$$

*Como seria a solução particular se fosse somente* $y'' - 2y' + y = 4sen(x)$?

Seria algo do tipo $y_{p1} = Acos(x) + Bsen(x)$

*Como seria a solução particular se fosse somente* $y'' - 2y' + y = x^2 - 1$?

Seria algo do tipo $y_{p2} = Cx^2 + Dx + E$.

Logo, $y_p = y_{p1} + y_{p2} = Acos(x) + Bsen(x) + Cx^2 + Dx + E$

Aplicando na EDO, temos:

$$y'' = -Acos(x) - Bsen(x) + 2C$$

$$y' = -Asen(x) + Bcos(x) + 2Cx + D$$

Logo:

$$x'' - 2x' + x = -Acos(x) - Bsen(x) + 2C + 2(-Asen(x) + Bcos(x) + 2Cx + D) + Acos(x) + Bsen(x) + Cx^2 + Dx + E$$

*Trabalhoso né*? Continuando. Isolando os senos e cossenos, temos;

$$\cos(x)(-A + 2B + A) + \operatorname{sen}(x)(-B - 2A + B) + Cx^2 + x(4C + D) + 2C + E + 2D = 4\operatorname{sen}(x) + x^2 - 1$$

Fazendo o sistema linear, temos:

$$2B = 0\,, B = 0$$

$$-2A = 4\ \ , A = -2$$

$$C = 1$$

$$4C + D = 0\,,D = -4$$

$$2C + 2D + E = -1\,,2 - 8 + E = -1\,,E = 5$$

Logo, a solução homogênea será:

$$y_p = -2sen(x) + x^2 - 4x + 5$$

**Tome o máximo de cuidado pra não errar as contas, é muito comum trocar sinais e errar toda a questão.**

Existem casos que há o produto entre dois tipos diferentes de função, nesses casos apenas multiplicamos as soluções particulares. **Show??**

***MUITO CUIDADO AQUI!! Os professores se amarram colocar isso em provas!!***

Acontece muitas vezes, de um termo da solução homogênea ser igual a um termo da solução particular. Daí, na hora de colocar a constante você **DEVE** ao invés de colocar apenas A.função, você coloca Ax.função, claro se não existir algo do tipo x.função do outro lado, se tiver, você coloca x².função. E por aí vai...

O que aconselhamos a fazer antes de QUALQUER questão desse tipo: **Sempre** ache primeiro a solução da homogênea pra depois achar as particulares, e sempre comparar se ela é do mesmo tipo. Isso reduz muito a chance de erro.

Vamos ver no exemplo:

***Ex:***

$$\boldsymbol{y'' - 4y + 4 = 4e^{2x} + x^2e^{2x} + cos(x)}$$

Sabemos que:

$$y_{total} = y_H + y_P$$

$y_H$: Achando a equação característica da EDO de 2ª Ordem homogênea, temos:

$$r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2 = 0$$

Logo, a equação tem raiz de multiplicidade 2($\Delta = 0$), com $r = 2$.

Então, a solução da homogênea será do tipo:

$$y_H = (A + Bx)(e^{2x}) = Ae^{2x} + Bxe^{2x}$$

Já a particular seria algo do tipo:

$$\boldsymbol{y'' - 4y + 4 = e^{2x}(4 + x^2)}$$

$$y_p = Ce^{2x}(Dx^2 + Ex + F) = CDx^2e^{2x} + CExe^{2x} + CFe^{2x} + G\cos(x) + Hsen(x)$$

Vemos que temos termos repetidos na homogênea e na particular. **Tá, e o que fazer?**

Devemos aumentar o grau das expressões da particular. **Como assim?**

Temos que fazer $y_p = x(CDx^2e^{2x} + CExe^{2x} + CFe^{2x}) = CDx^3e^{2x} + CEx^2e^{2x} + CFxe^{2x}$

Percebeu que ainda há termos em repetição?! Então temos que aplicar de novo!!

$$y_p = x^2(CDx^2e^{2x} + CExe^{2x} + CFe^{2x}) = CDx^4e^{2x} + CEx^3e^{2x} + CFx^2e^{2x}$$

Agora sim todos os graus diferentes, temos nossa solução particular correta.

E então a solução geral será:

$$y_{geral} = Ae^{2x} + Bxe^{2x} + CDx^4e^{2x} + CEx^3e^{2x} + CFx^2e^{2x} + Gcos(x) + Hsen(x)$$

Viu? Não mexemos no $Gcos(x) + Hsen(x)$, a função que é diferente (não se repete) a gente deixa intacta!

Daí é "só" achar as constantes e "correr pro abraço".

Ah, uma galera perguntou no **Solucionador** sobre as chamadas condições de contorno, pra determinar as constantes da homogênea. Geralmente vem uma parada do tipo y(0)=0 y'(0)=0. O y que você deve usar é o da solução geral, e não só a homogênea como nos perguntaram. Daí você vai ter um sistema com duas equações e duas incógnitas e é só resolver.

Se liga no exemplo que caiu no semestre passado:

*Ex:* **[UFRJ-2014.2-P1]**

Resolva o problema de contorno:

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 5y = e^x \cos(2x) \\ y(0) = 0, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

**Resposta:**

Temos uma equação de segunda ordem não homogênea.

Sua solução é dada por:

$$y_{total} = y_{homogênea} + y_{particular}$$

A equação característica é:

$$r^2 - 4r + 5 = 0$$

$$r = 2 \pm i$$

A solução homogênea é dada por:

$$e^x(A.cost + Bcost)$$

A solução particular é do tipo:

$$y_p = C.e^x(Dcos(2x) + Esen(2x))$$

Utilizando a equação inicial para $y_p$, *temos*:

$$y_p'' - 4y_p' + 5y_p = e^x \cos(2x)$$

$$C.e^x\big(Dcos(2x) + Esen(2x)\big)'' - 4[C.e^x(Dcos(2x) + Esen(2x)]' + 5C.e^x\big(Dcos(2x) + Esen(2x)\big) = e^x \cos(2x)$$

Ao encontrar $y_p(0) = 0$ e $y_p\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ achamos:

$$\boldsymbol{y_{total} = e^{2x}\left(\frac{1}{10}cos(x) - \frac{1}{10e^{\frac{\pi}{2}}}sen(x)\right) - e^x\left(\frac{1}{10}cos(2x) + \frac{1}{5}sen(2x)\right)}$$

# 2 FUNÇÕES VETORIAIS

Então, sabemos que um dos assuntos abordados na prova serão as funções vetoriais. Essas funções podem ser vistas como curvas espaciais, que descrevem o movimento de uma partícula. Portanto, a elas estão associadas grandezas como velocidade, aceleração e velocidade escalar. Além disso, podemos calcular também o comprimento de arco de uma função vetorial, que seria o comprimento do caminho percorrido pela partícula.

Vamos ver um exemplo de como isso pode ser abordado:

***Ex:*** Calcule o comprimento de arco da hélice $r(t) = \{sen(t), cos(t), \frac{t}{\pi}\},\ 0 < t < 4\pi$

Para calcular o comprimento de arco devemos integrar de 0 a 4π a velocidade escalar dessa função parametrizada em função de t, ou seja a raiz do quadrado das derivadas de componente.

$$L = \int_0^{4\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt$$

E vemos que para isso, devemos derivar a função vetorial e aplicar Pitágoras.

$$r'(t) = \left\{cos(t), -sen(t), \frac{1}{\pi}\right\}$$

$$x'(t) = \ cos(t)\ , y'(t) = -sen(t)\ ,\ \ z'(t) = \frac{1}{\pi}$$

E teremos então apenas que resolver essa integral para achar o comprimento de arco, podemos notar que nesse caso teremos que usar a identidade trigonométrica sen²(t) + cos²(t) = 1.

$$L = \int_0^{4\pi} \sqrt{(\cos(t))^2 + \big(-sen(t)\big)2 + \left(\frac{1}{\pi}\right)^2}\, dt = L =$$

$$\int_0^{4\pi} \sqrt{1 + \frac{1}{\pi^2}}\, dt = \sqrt{1 + \frac{1}{\pi^2}}.t\Big|_0^{4\pi} = 4\sqrt{\pi^2 + 1}$$

Mais um...

***Ex:*** Determine a velocidade, a aceleração e a velocidade escalar de uma partícula com posição

$$r(t) = \{t^2, sen(t), ln(t)\}$$

Sabemos pela física, que a velocidade é e primeira derivada da função posição, e a aceleração a segunda derivada. A velocidade escalar é o valor em módulo da velocidade, cuja fórmula foi descrita anteriormente.

$$v(t)\ =\ r'(t)\ =\ \left\{2t, cos(t), \frac{1}{t}\right\}$$

$$a(t) = r''(t) = \left\{2, -sen(t), -\frac{1}{t^2}\right\}$$

$$Ve(t) = \sqrt{4t^2 + cos^2(t) + 1/t^2}$$

Assim, podemos descrever bem o movimento dessa partícula.
Qualquer coisa pode mandar dúvidas pra gente, estaremos de plantão no Solucionador.

Boa prova, galeraaa!

## Dúvidas?

Acesse o ***Solucionador*** na página www.engenhariafacil.net ou mande email para *contato@engenhariafacil.net* .

*Curtam o **Engenharia Fácil** no Facebook .*