Gabarito
Prova Final de Cálculo II - 26/02/2013

1ª **QUESTÃO** (valor: 2.5 pts): Encontre a solução do problema com valor inicial:

$$x'' - x' - 2x = -2 - 6e^{2t}\,, \quad x(0) = 3\,, \quad x'(0) = -1$$

Solução: Equação característica: $r^2 - r - 2 = 0 \Rightarrow$ raízes: $r_1 = 2$ e $r_2 = -1$. Logo, a solução da equação homogênea associada é

$$x_h(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-t}$$

Para encontrar a solução particular da equação considere a equação:

$$x'' - x' - 2x = -2$$

Vamos supor que uma solução particular desta equação seja $x_{p1} = k$. Substituindo esta solução na equação tem-se,

$$-2k = -2 \Rightarrow k = 1$$

Agora, considerando a equação $x'' - x' - 2x = 6e^{2t}$, uma solução particular desta equação seria $x_{p2} = ce^{2t}$, porém esta é uma solução da equação homogênea associada $x'' - x' - 2x = 0$, assim multiplicamos esta solução por t, ou seja, $x_{p2} = cte^{2t}$. Assim,

$$x'_{p2} = ce^{2t} + 2cte^{2t}$$

e

$$x''_{p2} = 2ce^{2t} + 2ce^{2t} + 4cte^{2t}$$

Substituido-se x_{p2}, x'_{p2} e x''_{p2} na equação acima, tem-se

$$4ce^{2t} + 4cte^{2t} - ce^{2t} - 2cte^{2t} - 2cte^{2t} = 6e^{2t} \Rightarrow c = 2$$

Assim, $x_{p2} = 2te^{t}$. Logo,

$$x_p = x_{p1} - x_{p2} = 1 - 2te^{2t}$$

Portanto, a solução geral é

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t) = 1 - 2te^{2t} + c_1e^{2t} + c_2e^{-t}$$

e

$$x'(t) = -2e^{2t} - 4te^{2t} + 2c_1e^{2t} - c_2e^{-t}$$

Utilizando-se as condições iniciais:

$$x(0) = 1 - c_1 + c_2 = 3 \quad \text{e} \quad x'(0) = -2 + 2c_1 - c_2 = -1$$

obtém-se

$$c_1 = c_2 = 1$$

Portanto,

$$x(t) = 1 - 2te^{2t} + e^{2t} + e^{-t}$$

2^a **Questão** (valor: 2,5 pts): Dada a função $f(x,y,z) = axy^2 + byz + cx^3z^2$, determine as constantes a, b e c, tais que, a derivada direcional de f no ponto $P = (1,2,-1)$ tenha um valor máximo na direção positiva do eixo z, igual a 64.

Solução: A derivada direcional $D_u f(P)$ tem um valor máximo quando ela é calculada na direção do $\nabla f(P)$ e seu valor é igual ao $|\nabla f(P)|$. Assim, $D_u f(P)$ tem um valor máximo de 64 na direção do eixo z, isto é, na direção do vetor $\overrightarrow{k} = (0,0,1)$ se o vetor

$$u = \frac{\nabla f(P)}{|\nabla f(P)|} = (0,0,1) \Longrightarrow \frac{\nabla f(P)}{64} = (0,0,1)$$

Como

$$\nabla f = (ay^2 + 3cx^2z^2, 2axy + bz, by + 2cx^3z) \Rightarrow \nabla(f)(P) = (4a + 3c, 4a - b, 2b - 2c)$$

tem-se

$$\begin{aligned} 4a + 3c &= 0 \\ 4a - b &= 0 \\ 2b - 2c &= 64 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema acima obtém-se:

$$a = 6\,, \quad b = 24\,, \quad \text{e} \quad c = -8$$

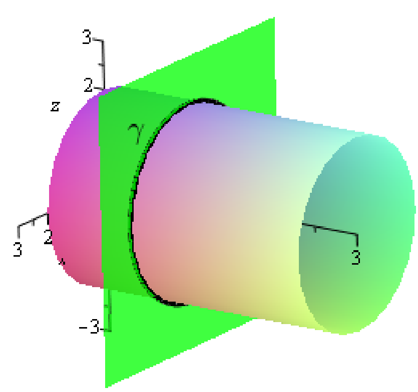
3^a **Questão** (valor: 2.5 pts): Considere a curva γ, dada pela interseção das superfícies $S_1 : x^2 + z^2 = 4$ e $S_2 : y = 1$.

(a) Faça um desenho da curva γ juntamente com S_1 e S_2,

(b) Encontre uma representação paramétrica para a curva γ.

(c) Determine o ponto Q sobre a curva γ em que o vetor tangente à γ em Q seja paralelo ao plano $x + 3y + z - 10 = 0$.

Solução: (a) A superfície S_1 é um cilindro fechado ao longo do eixo y e S_2 é um plano passando pelo ponto $(0,1,0)$ perpendicular ao eixo y. Assim, temos



(b) Como γ é uma circunferência de raio 2 no plano $y = 1$, temos:

$$x = 2\cos t\,, \quad y = 1\,, \quad z = 2\,\text{sen}\, t\,, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

(c) O vetor tangente à curva γ é o vetor $\gamma'(t) = (-2\,\text{sen}\, t, 0, 2\cos t)$.

O vetor $n = (1, 3, 1)$ é um vetor perpendicular ao plano $x + 3y + z - 10 = 0$. Logo, para que o vetor $\gamma'(t) = (-2\operatorname{sen} t, 0, 2\cos t)$ seja paralelo a este plano é necessário que $\gamma'(t) \perp n$, ou seja, o produto escalar entre os dois seja zero. Assim,

$$(1, 3, 1)(-2\operatorname{sen} t, 0, 2\cos t) = 0 \Rightarrow -2\operatorname{sen} t + 2\cos t = 0 \Rightarrow -2\operatorname{sen} t = -2\cos t$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = 1 \Rightarrow \tan t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} \quad \text{ou} \quad t = \frac{5\pi}{4}$$

Para $t = \frac{\pi}{4}$, tem-se, $Q = (2\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, 2\frac{\sqrt{2}}{2}) = (\sqrt{2}, 1, \sqrt{2})$

Para $t = \frac{5\pi}{4}$, tem-se, $Q = (2\frac{-\sqrt{2}}{2}, 1, 2\frac{-\sqrt{2}}{2}) = (-\sqrt{2}, 1, -\sqrt{2})$

4^a **Questão** (valor: 2.5 pts): Seja C uma curva de interseção da superfície $S_1 :\ x^3 + x^2y^2 + y^3 + 4xy + z^2 = 1$ com o gráfico da função $f(x, y) = -yx^2 + xy^2$

(a) Determine as equações paramétricas da reta r que é tangente à curva C no ponto $T = (1, -1, 2)$.

(b) Deternine o ponto de interseção, P, da reta r com o plano coordenado yz.

Solução: (a) A superfície S_1 é uma superfície de nível da função $G(x, y, z) = x^3 + x^2y^2 + y^3 + 4xy + z^2$. Logo, $\nabla G(T) \perp S_1$, e, portanto, $\nabla G(T) \perp C$ em P.

O gráfico de $f(x, y) = -yx^2 + xy^2$ é uma superfície de nível da função $F(x, y, z) = z + yx^2 - xy^2$ e, portanto, o $\nabla F(T)$ é perpendicular ao gráfico de f em P. Logo, $\nabla F(T) \perp C$ em P.

Assim, o vetor $n = \nabla G(P) \times \nabla F(P)$ é um vetor tangente à curva C em P e, portanto, é o vetor que dá a direção da reta tangente à curva C no ponto $T = (1, -1, 2)$.

$$\nabla G = (3x^2 + 2xy^2 + 4y, 2x^2y + 3y^2 + 4x, 2z) \Rightarrow \nabla G(T) = (1, 5, 4)$$
$$\nabla F = (2xy - y^2, x^2 - 2xy, 1) \Rightarrow \nabla F(T) = (-3, 3, 1)$$

então,

$$n = \nabla G(P) \times \nabla F(P) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 5 & 4 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-7, -13, 18)$$

Logo, as equações paramétricas da reta r tangente à curva C no ponto $T = (1, -1, 2)$ são:

$$x = 1 - 7t\,, \quad y = -1 - 13t\,, \quad z = 2 + 18t$$

(b) A reta r intercepta o plano yz no ponto P em que a coordenada $x = 0$. Portanto,

$$1 - 7t = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{7} \Rightarrow y = -\frac{20}{7} \text{ e } z = \frac{32}{7}$$

Assim,

$$P = \left(0, -\frac{20}{7}, \frac{32}{7}\right)$$