Engenharia Fácil

www.engenhariafacil.weebly.com

Resolução das Provas Antigas

Resolução das objetivas 3ª Prova de Álgebra Linear II da UFRJ, período 2013.1

OBS: Todas as alternativas corretas são as letras A.

1)

Resposta:

Para dois vetores serem ortogonais devemos ter <p,q>=0

A única alternativa que é assertiva é a que possui os vetores $p(x) = x^2 - x$ e $q(x) = x^2 - 2x$, pois:

$$< p, q >= p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2) = 0.0 - 1.0 + 2.0 = 0$$

2)

Resposta:

Para que dois vetores sejam LI, basta apenas o ângulo entre eles ser diferente de zero. Logo, b,c e d estão erradas. Ser LD significa que existe ao menor dois vetores LD, sendo esses vetores paralelos, logo não são ortogonais.

3)

Resposta:

Temos o Teorema:

$$(Im(A))^{\perp} = Nuc(A^T)$$

Temos que:

$$< Im(A), (Im(A))^{\perp} > = 0$$

Sendo $(Im(A))^{\perp}$ um vetor (x,y,z) qualquer, temos:

$$< (1,1,1), (x, y, z) > = x + y + z = 0$$

A solução dessa equação formam o plano que é complemento ortogonal de Im(A), ou seja $(Im(A))^{\perp}$.

Como $(Im(A))^{\perp} = Nuc(A^T)$, o conjunto de soluções de x+y+z=0 é $Nuc(A^T)$.

4)

Resposta:

Para uma matriz ser Antissimétrica , temos:

$$A = -A^T$$

Logo, toda matriz Antissimétrica tem diagonal principal nula e $a_{ij} = -a_{ji}$, como a matriz abaixo.

$$\begin{bmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$$

Já para ser triangular o que está abaixo ou acima da diagonal principal tem que ser nula, neste caso, a,b e c=0. Logo, uma matriz pra ser antissimétrica e triangular tem que ser a matriz nula.

5)

Resposta:

Vamos analisar todas as alternativas:

a)No caso de uma matriz não quadrada mxn sendo m<n, A pode ser injetiva mas A^T não pode. Por causa do Teorema do Núcleo e Imagem.

Já que para A ser injetiva dim(Nuc(A))=0 e , neste caso, é impossível dim(Nuc(A^T))=0.

A^T é uma matriz nxm. Pelo Teorema Nucleo-Imagem , temos dim(Nuc(A^T))+dim(Im(A^T))=n

Mas o maior valor que dim(Im(A^T)) pode ter é m. Logo, dim(Nuc(A^T)) nunca será zero pois n>m.

b)Como detA=detA^T e detA≠0 (pois A é inversível) , logo $detA^T \neq 0$ e a matriz A^T também é inversível.

c)Para uma matriz nxn ser diagonalizável , a matriz em questão deve possuir uma base de autovetores de dimensão n.Para determinar os autovetores em questão, primeiro descobrimos os autovalores.

Para achar os autovalores utilizamos a equação $det(A - \lambda I) = 0$ encontrando como raízes os autovalores λ_n. Como detA=detA^T, temos $det(A - \lambda I) = det(A^T - \lambda I)$. Logo A^T tem os mesmos autovalores de A, gerando uma base de autovetores com dimensão idêntica a de A.

d) A condição de uma matriz ser simétrica é A=A^T. Logo se A for simétrica, A^T também é.

6)

Resposta:

A letra A está falsa pois, se houverem raízes iguais, pode gerar uma matriz de cisalhamento, não diagonalizável.

b) Verdadeira, pois quando existem autovalores complexos eles geram uma rotação no vetor, não satisfazendo o conceito de autovetor, que é multiplicar por um escalar sem mudar a direção.

c)Verdadeira. Se possui autovalores, possui ao menos um autovetor.

d)Verdadeira, pois como detA=detA^T, temos $det(A - \lambda I) = det(A^T - \lambda I)$. Logo A^T tem os mesmos autovalores de A, gerando uma base de autovetores com dimensão idêntica a de A.

7)

Resposta:

Autovetores de uma base de autovetores são linearmente independentes, a única opção de vetor que é LI a u e v é (1,2,2).

8)

Resposta:

Para calcular os autovalores usamos o polinômio característico Det$(A - \lambda I) = 0$ e suas raízes são os próprios autovalores.

Logo:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

Resolvendo as equações encontramos as raízes , que são autovalores, como $\lambda = 2 \pm i$

9)

Resposta:

Podemos utilizar uma matriz qualquer com estes autovalores. Neste caso, podemos utilizar a matriz diagonal A. Temos:

A=$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Logo, [A+I]=$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$+$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$$[A + I]^{200} = \begin{bmatrix} (-1)^{200} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1^{200} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculando os autovalores dessa nova matriz, temos:

Det$([A + I]^{200} - \lambda I) = 0$

$$(1 - \lambda)(-\lambda)(1 - \lambda) = 0$$

A solução desta equação são os autovalores da matriz, que são 1,1 e 0.

10)

Resposta:

Temos que a transformação que multiplica o vetor (1,-1) por 4 e (1,2) por 1/4 , tem autovalores 4 e 1/4 e autovetores (1,-1) e (1,2).

Logo, para calcular o a matriz mudança de base A na base canônica, temos:

$$A = PDP^{-1}$$

Sendo P a matriz com a base dos autovetores e D a matriz diagonalizada.

Logo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} + \frac{1}{12} & -\frac{4}{3} + \frac{1}{12} \\ * & * \end{bmatrix}$$

Logo, a soma da primeira linha é 4/3 +1/6= 3/2.

11)

Resposta:

Tendo o espaço dos Polinômios $\mathbb{P}^3$ dimensão 4, o complemento ortogonal do espaço gerado por 3 vetores LI é 4-3=1.

12)

Resposta:

Temos o vetor (2,3,-1) o vetor normal ao plano z=2x+3y.

Os vetores que geram o plano é a solução da equação ao lado. Temos como solução os vetores t(1,0,2) e s(0,1,3).

Para achar a projeção dos vetores no plano multiplicados por 4, utilizamos a transformação linear com os dois vetores geradores e mais o ortogonal (2,3,-1). Logo, temos:

$$T(1,0,2) = (4,0,8)$$

$$T(0,1,3) = (0,4,12)$$

$$T(2,3,-1) = (0,0,0)$$

Logo, a matriz transformação T é dada por:

$$T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 8 & 12 & 0 \end{bmatrix}$$

Seus autovalores são dados pelo seu polinômio característico, dado por: $\det(T - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 4-y & 0 \\ 8 & 12 & -y \end{vmatrix} = -(4-\lambda)^2\lambda = 0$$

Logo, as raízes do polinômio característico e autovalores da matriz são 4,4 e 0.

13)

Resposta:

Podemos utilizar a fórmula para a projeção:

$$P_{u\ emV} = \frac{<\vec{u},\vec{v}>}{<\vec{v},\vec{v}>}\vec{v} = \frac{1.0+1.0+1.1+1.0}{1^2+1^2+1^2+1^2}\vec{v} = \frac{1}{4}(1,1,1,1) = (\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$$

14)

Resposta:

A distância entre os vetores u e v é dada por:

$$d(u,v) = \left||\vec{u}-\vec{v}|\right| = \left||(2,0,1,-1)-(2,1,1,1)|\right| = \left||0,-1,0,-2|\right| = \sqrt{<u-v,u-v>} = \sqrt{5}$$

15)

Resposta:

Para encontrar o autovetor associado a uma matriz,calculamos [A-$\lambda I]\vec{k}$=0

$$\left(\begin{bmatrix}-2 & 1 & -1\\ 0 & 5 & 2\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}\right)\vec{k} = 0$$

$$\begin{bmatrix}-7 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -6\end{bmatrix}\vec{k} = \begin{bmatrix}-7 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = 0$$

Logo, temos que z=0 e -7x+y-z=0 e y=7x

Logo, temos o vetor solução e autovetor (1,7,0).

Qualquer múltiplo deste autovetor também é autovetor, logo, multiplicando o vetor por -2, encontramos o vetor que o enunciado pede.

$$v = (-2,\alpha,b) = -2(1,7,0) = (-2,-14,0)$$

Logo $\alpha = -14$ e $\beta = 0$

$$\alpha + \beta = -14$$

16)

Resposta:

Temos y=ax³+b:

Substituindo os valores dados, temos:

$$-4 = -a + b$$

$$1 = b$$

$$12 = a + b$$

Podemos montar a seguinte matriz para resolução do sistema:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 12 \end{bmatrix}$$

E logo vemos que este sistema é impossível. Para obter a melhor aproximação, podemos utilizar o Método de Mínimos Quadráticos. Temos:

$$A^T A\vec{z} = A^T \vec{b}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Logo, temos:

$$2a = 16 \ , 3b = 9$$

$$a = 8 \ e \ b = 3$$

<u>Bons Estudos!!</u>

Dúvidas?

Acesse o ***Solucionador*** na página www.engenhariafacil.weebly.com ou mande email para *contatoengenhariafacil@gmail.com* .