Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemátcia
Disciplina: Cálculo II
Data: 18/11/2014

SEGUNDA PROVA UNIFICADA

1. Considere a superfície S de equação $x = xy^2 + zx$. Se o vetor $\mathbf{v} = (a, b, c)$ é tangente a S em $(1, 1, 2)$, então:

   (a) $2a + 2b + c = 0$
   (b) $a + 3b + 2c = 0$
   (c) $2a + 2b - c = 0$
   (d) $3a + 2b + c = 2$
   (e) $2a + 2b + c = 1$

2. Seja $2x - 3y + z = 1$ a equação do plano tangente ao gráfico de $f(x, y)$ no ponto $(3, 2)$. Se $x = u^2 + 2$, $y = 2uv$ e $F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$, o valor de $\dfrac{\partial F}{\partial u}(1, 1)$ é:

   (a) 2
   (b) 4
   (c) -2
   (d) 0
   (e) -6

3. Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } y > x \\ x + y & \text{se } y \leq x \end{cases}$$

   Então f possui:

   (a) nenhum ponto de descontinuidade
   (b) apenas dois pontos de descontinuidade
   (c) nenhuma das outras opções
   (d) apenas um ponto de descontinuidade
   (e) infinitos pontos de descontinuidade

4. Seja $f(x, y)$ uma função com derivadas parciais de segunda ordem contínuas no ponto $(2, 1)$. Assuma que $(2, 1)$ é um ponto crítico de f e que $f_{xx}(2, 1) = 1$, $f_{xy}(2, 1) = 2$. Então $(2, 1)$ é um ponto de mínimo local de f se:

   (a) $f_{yy} < 2$
   (b) $f_{yy} > 4$
   (c) $f_{yy} < 4$
   (d) a informação é insuficiente
   (e) $f_{yy} > 2$

5. Considere os seguintes limites:

$$i) \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} \qquad ii) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^4}.$$

   Então:

   (a) i) existe; ii) existe
   (b) i) existe; ii) não existe
   (c) i) não existe; ii) não existe
   (d) i) não existe; ii) existe
   (e) nenhuma das outras opções

6. Suponha a função $f(x, y, z)$ tem um ponto crítico em (x_0, y_0, z_0) no espaço. Se $a > 0$ e $b > 0$ são números reais positivos, então a função $g(x, y, z) = af(x, y, z) + b$ tem um ponto crítico em

   (a) (x_0, y_0, z_0)
   (b) $a(x_0, y_0, z_0) + b$
   (c) a informação é insuficiente
   (d) $\frac{1}{a}(x_0, y_0, z_0)$
   (e) $a(x_0, y_0, z_0)$

7. Considere $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y}$. Se $\mathbf{v} = (a, b)$ é um vetor unitário tal que $D_{\mathbf{v}} f(2, 1)$ é máxima, então $a + b$ vale:

   (a) 2
   (b) $-1/5$
   (c) $2/\sqrt{5}$
   (d) $1/\sqrt{5}$
   (e) -2

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Matemática

SEGUNDA PROVA UNIFICADA - CÁLCULO II

Politécnica, Engenharias 18/11/2014

1ª Questão (*2.5 pontos*). Considere a função $f(x,y) = \dfrac{y^3}{3} - 9y + x^2$

(a) Determine e classifique os pontos críticos de f em todo o $\mathbb{R}^2$.

(b) Determine os pontos de máximo e mínimo de f sobre a circunferência:

$$x^2 + (y+3)^2 = 9$$

(c) Determine os valores máximo e mínimo de f no disco

$$D = \{(x,y) \ : \ x^2 + (y+3)^2 \leq 9\}$$

e os pontos onde estes valores ocorrem.

2ª Questão (*2.6 pontos*). Seja S a superfície dada pela equação $z = x^2 - y^2$.

(a) Determine a equação do plano tangente T, num ponto genérico (a,b,c) de S.

(b) Determine os pontos de S, onde o plano tangente é paralelo ao plano

$$4x + 2y + z = 11$$

(c) Determine os valores numéricos de c e descreva a curva formada pelos pontos (a,b,c) de S, de tal modo que o plano tangente T, encontrado em (a), contenha a origem.
