www.engenhariafacil.weebly.com

Elaborado por: João Batista F. Sousa Filho (Graduando Engenharia Civil –UFRJ- 2014.1)

Bizu: ***Resumo com exercícios resolvidos do assunto:***

(I) Métodos de Integração.

(I) Métodos de Integração.

Nesse #OlhaoBizu vamos abordar os métodos de integração por substituição simples, integração por partes, integração por substituição trigonométrica e integração por frações parciais.

Substituição Simples

O método de integração por substituição simples consiste em poder encontrar em uma mesma função , alguma outra função e a sua derivada de forma que possa se substituir a integral para outra variável deixando a integral trivial (integral de polinômio, seno, cosseno, exponencial, etc).

Exemplo 1:

$$\int \boldsymbol{x.sen(x^2)dx}$$

Utilizamos x^2=f(x) e f'(x) = 2x

Na notação de Leibniz,temos:

$$u = x^2 \ , \frac{du}{dx} = 2x$$

$$x.dx = \frac{du}{2}$$

Agora, podemos transformar a função de x para função de u, substituindo as relações encontradas. Temos:

$$\int x.sen(x^2)dx = \int sen(u)\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int sen(u)du$$

Agora, resolvendo a integral trivial, temos:

$$\frac{1}{2}\int sen(u)du = -\frac{1}{2}\cos(u) + C$$

Substituindo para x novamente, temos:

$$-\frac{1}{2}\cos(u) + C = -\frac{1}{2}\cos(x^2) + C$$

$$\boxed{\int x.sen(x^2)dx = -\frac{1}{2}\cos(x^2) + C}$$

Exemplo 2:

$$\int cotg(x)dx$$

Da relação trigonométrica cotg(x) = $\frac{cos\,(x)}{\text{sen}\,(x)}$

$$\int \frac{\cos(x)}{sen(x)}dx$$

Nesta integral, podemos notar que temos a função sen(x) e a cos(x) que são uma derivada da outra.Neste caso, fazemos:

$$sen(x) = u$$

$$\frac{du}{dx} = \cos(x)\,, \qquad du = \cos(x)\,dx$$

Substituindo os valores encontrados na integral, temos:

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

Voltando para variável x, temos:

$$\boxed{\int cotg(x)dx = \ln|sen(x)| + C}$$

Exemplo 3:

$$\int \sqrt{ax - b}\,dx$$

$$(Sendo\ a\ e\ b\ constantes\ não\ nulas)$$

Temos:

$$u = ax - b$$

$$\frac{du}{dx} = a \ , dx = \frac{du}{a}$$

Substituindo na integral, temos:

$$\int \sqrt{ax-b}\, dx = \int \sqrt{u} \frac{du}{a} = \frac{1}{a} \int \sqrt{u} du$$

$$\frac{1}{a} \int \sqrt{u} du = \frac{1}{a} . \frac{2}{3} u^{3/2} + C$$

Transformando para função de x novamente, temos:

$$\int \sqrt{ax-b}\, dx = \frac{2}{3a} (ax-b)^{3/2} + C$$

Integral por Partes

Essa é uma regra derivada da regra do produto na derivação e pode ser aplicada para diversos tipos de integrais. Temos:

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$[f(x)g(x)]' - f'(x)g(x) = f(x)g'(x)$$

Integrando em ambos os lados, temos:

$$\int f(x)g'(x)dx = \int [f(x)g(x)]' dx - \int f'(x)g(x)\, dx$$

$Chamando\ f(x) = u\ e\ g(x) = v\ , f'(x) = \frac{du}{dx}\ e\ g'(x) = \frac{dv}{dx}\ e\ substituindo\ , temos:$

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

Para poder se utilizar esse método, é necessário que após aplica-lo encontraremos uma integral trivial, ou a mesma integral. Vamos aos exemplos.

Exemplo 1:

$$\int x^2 sen(2x)dx$$

Primeiro, devemos analisar qual das duas poderia, ao ser derivada, tornar a integral trivial. Vemos que a função x^2 ao ser derivada duas vezes tornaria uma integral trivial, apenas trigonométrica. Logo, temos:

$$u = x^2 \quad , du = 2xdx$$

$$dv = sen(2x)dx \ \ , v = \ -\frac{1}{2}\cos(2x)$$

Pelo método de integral por partes

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int x^2 sen(2x)dx = -\frac{\cos(2x)\,x^2}{2} - \int -\frac{\cos(2x)\,2xdx}{2}$$

$$\int x^2 sen(2x)dx = -\frac{\cos(2x)\,x^2}{2} + \int \cos(2x)\,xdx$$

Aplicando partes novamente, temos:

$$\int \cos(2x)\,xdx$$

$$u = x \quad , du = dx$$

$$dv = cos(2x)dx \ \ , v = \frac{1}{2}\mathrm{sen}(2x)$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int xcos(2x)dx = \frac{xsen(2x)}{2} - \int \frac{1}{2}sen(2x)dx = \frac{xsen(2x)}{2} + \frac{\cos(2x)}{4}$$

$$\int x^2 sen(2x)dx = -\frac{\cos(2x)\,x^2}{2} + \frac{xsen(2x)}{2} + \frac{\cos(2x)}{4} + \mathrm{C}$$

Como vimos neste exercício, há a possibilidade de aplicar muitas vezes este método até determinar a integral.

Exemplo 2:

$$\int arctg(x)dx$$

Como não é uma integral trivial, podemos recorrer ao método de partes. Temos:

$$\int arctg(x)dx = \int arctg(x).1.dx$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$u = arctg(x) \quad , du = \frac{dx}{x^2+1}$$

$$dv = 1. dx \, , v = x$$

Substituindo:

$$\int arctg(x) = x. arctg(x) - \int \frac{xdx}{x^2+1}$$

Pelo método de substituição simples, temos:

$$\int \frac{xdx}{x^2+1}$$

$$u = x^2 + 1 \quad , \frac{du}{2} = xdx$$

$$\int \frac{du}{2u} = \frac{\ln|x^2+1|}{2} + C$$

Logo:

$$\int arctg(x) = x. arctg(x) - \frac{\ln|x^2+1|}{2} + \mathrm{C}$$

Como vimos nesta questão, para determinar uma integral por partes também podemos utilizar outros métodos.

Exemplo 3:

$$\int e^{9x} \cos(2x) \, dx$$

Utilizando o método de integração por partes, temos:

$$u = \cos(2x) \quad , du = -2sen(2x)dx$$

$$dv = e^{9x} dx \quad , v = \frac{e^{9x}}{9}$$

Aplicando partes:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int e^{9x} \cos(2x) \, dx = \frac{e^{9x} \cos(2x)}{9} - \int \frac{e^{9x}}{9} (-2sen(2x)dx)$$

$$\int e^{9x} \cos(2x) \, dx = \frac{e^{9x} \cos(2x)}{9} + \frac{2}{9} \int e^{9x} sen(2x) dx$$

Utilizando partes novamente, temos:

$$\int e^{9x} sen(2x)dx$$

$$u = \operatorname{sen}(2x) \quad , du = 2cos(2x)dx$$

$$dv = e^{9x}dx \quad , v = \frac{e^{9x}}{9}$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int e^{9x} sen(2x)dx = \frac{e^{9x}}{9}\operatorname{sen}(2x) - \int \frac{e^{9x}}{9} 2cos(2x)dx$$

Logo vemos, que esta é a expressão inicial que queremos calcular.

Da equação inicial, temos:

$$\int e^{9x}\cos(2x)\,dx = \frac{e^{9x}\cos(2x)}{9} + \frac{2}{9}\left(\frac{e^{9x}}{9}\operatorname{sen}(2x) - \int \frac{e^{9x}}{9} 2cos(2x)dx\right)$$

$$\int e^{9x}\cos(2x)\,dx = \frac{e^{9x}\cos(2x)}{9} + \frac{2e^{9x}}{81}\operatorname{sen}(2x) - \frac{4}{81}\int e^{9x}\cos(2x)\,dx$$

$$\frac{85}{81}\int e^{9x}\cos(2x)\,dx = \frac{e^{9x}\cos(2x)}{9} + \frac{2e^{9x}}{81}\operatorname{sen}(2x)$$

$$\int e^{9x}\cos(2x)\,dx = \frac{9}{85}e^{9x}\cos(2x) + \frac{2}{85}e^{9x}\operatorname{sen}(2x) + C$$

Como vimos, nem sempre é necessário resolver todas as integrais. Integrais com seno ou cosseno multiplicadas por exponenciais costumam ser solucionáveis desta forma.

BIZU: Um método prático para a resolução de integrais por partes é usar a estratégia do LIATE.

L	I	A	T	E
Logarítmicas	**I**nversas de trigonométricas	**A**lgébricas	**T**rigonométricas	**E**xponenciais

No esquema acima, as letras do anagrama LIATE são iniciais de diferentes tipos de funções.

Uma estratégia que funciona bem é: ao realizar uma integração por partes, escolher, dentre as duas funções que aparecem sob o sinal de integral,

- Como função de u: a função cuja letra inicial de caracterização posiciona-se mais à esquerda do anagrama;

- Como formando a diferencial dv: a função cuja letra inicial de caracterização posiciona-se mais à direita no anagrama.

Integração por Substituição Trigonométrica

Este método consiste em substituir uma variável por uma função trigonométrica. São bastante aplicáveis nos casos de integrais da forma:

I) $\sqrt{a^2 - x^2}$

II) $\sqrt{a^2 + x^2}$

III) $\sqrt{x^2 - a^2}$ $\quad a \in \mathbb{R}$

Nestes casos, substituímos a variável x por:

I) x=a.sen(t) dx=a.cos(t).dt

II) x= a.tg(t) dx=a.sec²(t).dt

III) x=a.sec(t) dx=a.sec(t).tg(t).dt

Ao fazer a substituição encontraremos uma identidade trigonométrica.

Passo a Passo para resolver uma integral por Substituição Trigonométrica.

1° Passo: Analisar se é um dos três casos e qual deles (I,II e III) existem na equação .

2° Passo: Substituir a variável da função pelos sua respectiva função trigonométrica.

3° Passo:Derivá-las e encontrar a expressão para o dx.

4° Passo: Integrar a função obtida (Trivialmente, partes, etc).

5° Passo: Transformar de t para x novamente.

Obs.: O método de substituição trigonométrica não é somente aplicável nesses casos.Há diversos casos, das mais diversas formas de complexidade em que este método pode ser utilizado.

Vejamos melhor com esses exemplos.

Exemplo 1:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

Nesta função podemos utilizar o caso II de integração.

Temos:

$$x = a.tg(t)$$

dx=a.sec²(t)dt

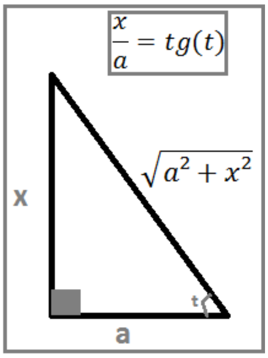
Substituindo, temos:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \int \frac{a.sec^2(t)dt}{\sqrt{a^2(1+tg^2(t))}} = \int \frac{a.sec^2(t)dt}{a.\sec(t)} = \int \sec(t)\,dt$$

$$\int \sec(t)\,dt = \ln|sec\,t + tg(t)| + C$$

Para voltar para a variável, x podemos fazer a seguinte relação:

$$\frac{x}{a} = tg(t)$$



Como nossa resposta é ln|sec(t) + tg(t)|, substituindo, temos:

$$\ln|sec\,(t) + tg(t)| = \ln|\frac{1}{\cos(t)} + tg(t)\,|$$

$$= \ln|\frac{1}{\cos(t)} + tg(t) = \ln|\frac{\sqrt{\mathrm{a}^2+\mathrm{x}^2}}{\mathrm{a}} + \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{a}}| + \mathrm{C}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = ln|\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} + \frac{x}{a}| + \mathrm{C}$$

Exemplo 2:

$$\int \sqrt{16-x^2}dx$$

Temos o caso I, logo substituímos a função x por:

$$x = 4sen(t) \qquad ,dx = 4\cos(t)dt$$

$$\int \sqrt{16-x^2}dx = \int \sqrt{16-16sen^2(t)}.4\cos(t)dt$$

$$\int \sqrt{16-x^2}dx = \int \sqrt{16(1-sen^2(t)}\,.4\cos(t)\,dt = \int 16cos^2(t)dt$$

Para tornar esta integral uma integral mais fácil de ser resolvível, temos a seguinte relação trigonométrica.

$$Cos(2t) = cos^2(t) - sent^2(t)$$

$$Cos(2t) = cos^2(t) - \left(1 - cos^2(t)\right) = 2cos^2(t) - 1$$

$$cos^2(t) = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$$

$$\int 16cos^2(t)dt = \int 16\left(\frac{1 + \cos(2t)}{2}\right)dt = \int 8dt + \int 8\cos(2t)\,dt$$

$$\int 2dt + \int 2\cos(2t)\,dt = 2t + 4sen(2t) + C$$

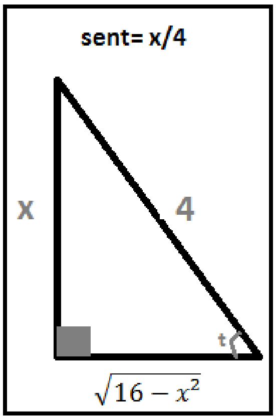
Transformando para função de x novamente, temos:

$$\frac{x}{4} = sen(t)\,, arcsen\left(\frac{x}{4}\right) = t$$

Temos a relação Trigonométrica:

Sen(2t) = 2sen(t)cos(t)

Pela figura,temos:



Sen(t)= x/4

Cos(t) = $\frac{\sqrt{16-x^2}}{4}$

Logo:

$$8t + 4sen(2t) + C = 8.arcsen\left(\frac{x}{4}\right) + 8.\left(\frac{x}{4}\right).\frac{\sqrt{16 - x^2}}{4} = 8.arcsen\left(\frac{x}{4}\right) + x.\frac{\sqrt{16 - x^2}}{2} + C$$

$$\int \sqrt{16 - x^2}dx = 8.arcsen\left(\frac{x}{4}\right) + x.\frac{\sqrt{16 - x^2}}{2} + C$$

Integração por Frações Parciais

Este método consiste em separar equações que tem em seu denominador funções fatoráveis, até a sua forma irredutível (quando não se é mais possível fatorar).

As seguintes operações são feitas:

$$\frac{h(x)}{f(x)g(x)} = \frac{A}{f(x)} + \frac{B}{g(x)}$$

Daí, fazendo o mínimo comum, podemos fazer o seguinte sistema linear.

$$A.g(x) + B.f(x) = h(x)$$

Resolvendo este sistema, podemos encontrar as constantes A e B e a integração fica mais fácil.

Exemplo 1:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 5x}$$

Fatorando a função x²-5x para x(x-5), podemos fazer o seguinte sistema linear.

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-5} = \frac{1}{x^2 - 5x}$$

$$A(x-5) + Bx = 1$$

$$Ax - 5A + Bx = 1$$

Assim temos o sistema.

$$Ax + bx = 0x \quad , A + B = 0$$

$$-5A = 1 \quad , A = -\frac{1}{5} \quad , B = \frac{1}{5}$$

Logo:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 5x} = \int -\frac{1}{5x} + \int \frac{1}{5(x-5)}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 5x} = -\frac{1}{5}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{5}\int \frac{dx}{(x-5)}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 5x} = -\frac{1}{5}\ln|x| + \frac{1}{5}\ln|x-5| + C$$

Exemplo 2:

$$\int \frac{4x+4}{x^3 - 1} dx$$

Fatorando o denominador, temos:

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$$

Utilizando o método de frações parciais, temos:

$$\frac{4x+4}{x^3-1} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx+C}{(x^2+x+1)}$$

Obs: Quando o fator irredutível da fatoração tiver grau maior que 1, o polinômio do numerador deve ser em 1 grau menor que este fator.

Logo , temos:

$$A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1) = 4x + 4$$

$$Ax^2 + Bx^2 + Ax - Bx + Cx + A - C = 4x + 4$$

$$A + B = 0$$

$$A - B + C = 4$$

$$A - C = 4$$

Logo,temos :

$$A = \frac{8}{3} \;, B = -\frac{8}{3} \;, C = -\frac{4}{3}$$

Então:

$$\int \frac{4x+4}{x^3-1}dx = \int \frac{8}{3(x-1)}dx + \int \frac{-4}{3} \cdot \frac{(2x+1)}{(x^2+x+1)}dx$$

Logo:

$$\int \frac{4x+4}{x^3-1}dx = \frac{8}{3}\ln|x-1| - \frac{4}{3}\ln|x^2+x+1| + C$$

Observações:

$\boldsymbol{Obs_1}$: Sempre quando houver as funções seno ou cosseno elevado ao quadrado, ao cubo, etc., devemos sempre utilizar identidades trigonométricas, como cos(2t)=2cos²t-1 = 1-2sen²t , para resolver as integrais trivialmente em função de cos(2t), cos(4t), dependendo de quanto está sendo elevado a função.

$\boldsymbol{Obs_2}$: Também pode ser necessária algumas operações do tipo:

$$Sen(A+B) = senAcosB + senBcosA$$

$$Sen(A-B) = senAcosB - senBcosA$$

Pela soma das duas equações, temos:

$$senAcosB = \frac{sen(A+B) + sen(A-B)}{2}$$

$$Cos(A+B) = \ cosAcosB - senAsenB$$

$$Cos(A-B) = \ cosAcosB + senAsenB$$

Pela soma das duas equações, temos:

$$cosAcosB = \ \frac{\cos(A+B) + \ \cos(A-B)}{2}$$

As variações de soma e subtração das equações de soma e subtração de senos e cossenos pode nos ajudar a resolver integrais pois transformam multiplicação de funções trigonométricas em soma. Estas fórmulas são chamadas de relação de Prostaférese.

$\boldsymbol{Obs_3}$:Antes de aplicar o método de frações parciais tente fazer a divisão dos polinômios para simplificar a integral, como por exemplo:

$$\boldsymbol{\int \frac{x^2+4x+3}{x^2+2x+1}dx = \int \frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+1}dx + \int \frac{2x+2}{x^2+2x+1}dx = \int dx + \int \frac{2x+2}{x^2+2x+1}dx}$$

$$\boldsymbol{\int \frac{x^2+4x+3}{x^2+2x+1}dx = x + ln|x^2+2x+1| + C}$$

Este caso só é possível quando o polinômio do numerador é maior que o do denominador.

Exercícios:

Calcule as Integrais indefinidas abaixo:

1)(UFRJ)

$$\int \frac{x^2+3}{x^4-1}dx$$

2)(UFRJ)

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1+x^4}}dx$$

3)(UFPE)

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}dx$$

4)(UFPE)

$$\int x^3e^{-2x^4}dx$$

5)(UFPB)

$$\int tg^2(x)\sec(x)\,dx$$

6)(UFPB)

$$\int \frac{(x - arctgx)}{1 - x^2}dx$$

7)(UFSCAR)

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1 + x^2}}$$

8)(UFSCAR)

$$\int \frac{dx}{x^3 + 1}$$

9)(USP)

$$\int \frac{cos^3(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$$

10) (ITA)

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{2x - x^2}}$$

11)(ITA)

$$\int \ln^2|x + \sqrt{1 + x^2}|dx$$

12) (UFRJ)

$$\int \cos(x)cos^2(3x)dx$$

13)(UFRJ)

$$\int \frac{\ln|x^3 + 1|}{\mathrm{x}^3}dx$$

<u>Bons Estudos!!</u>

Dúvidas?

Acesse o ***Solucionador*** na página www.engenhariafacil.weebly.com ou mande email para *contatoengenhariafacil@gmail.com* .