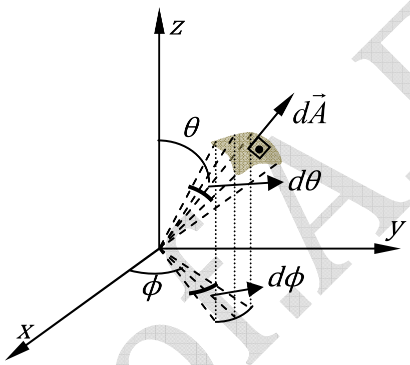
Questão 1

A pressão atmosférica pode ser considerada *constante* em todos os pontos de uma região de volume pequeno. Além disto, a pressão de um gás (ou de um fluido de um modo geral) é considerada *isotrópica*, isto é, a pressão é *igual em todas as direções* em torno de um dado ponto. A *força* produzida por esta pressão é portanto *ortogonal* a um elemento qualquer de superfície infinitesimal sobre um dado corpo. Considere a pressão exercida sobre a superfície de um corpo. Usando coordenadas esféricas mostre que a força sobre um elemento de área *dA* pode ser decomposta em três componentes dados por: $F_z = p\,dA\,cos\theta$, $F_x = p\,dA\,sen\theta\,cos\phi$ e $F_y = p\,dA\,sen\theta\,cos\phi$. Onde *dA* é o elemento de área em coordenadas esféricas, ou seja, $dA = r^2 sen\theta\,d\theta\,d\phi$.

Resolução:

Em coordenadas esféricas temos:



Como a força é dada por:

$$d\vec{F} = p d\vec{A} \quad (1.1)$$

Ou seja, e elemento infinitesimal de força é paralelo à direção do elemento infinitesimal do vetor área. Logo:

$$dF_z = p\,dA\,cos\theta \quad (1.2)$$
$$dF_x = p\,dA\,sen\theta\,cos\phi \quad (1.3)$$
$$dF_y = p\,dA\,sen\theta\,sen\phi \quad (1.4)$$

Esses elementos infinitesimais de força representam as forças do elemento de área, F_x, F_y e F_z.

Questão 2

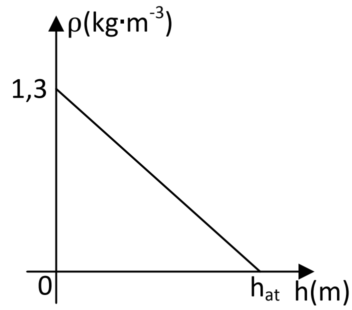
Qual seria a altura da atmosfera se a densidade do ar (a) fosse constante e (b) diminuísse linearmente a zero com a altura? Suponha que a densidade ao nível do mar é 1,3 kg·m^{-3}.

Resolução:

a) Utilizando a expressão da pressão de um fluido com densidade constante, teremos:

$$P = \rho g h$$
$$10^5 = 1,3 \cdot 10 \cdot h$$
$$h \cong 7692,3m$$
$$(2.1)$$

b) Considerando que a densidade diminui linearmente com a altitude, teremos:



$$dP = g\,\rho\,dh$$
$$P = g\int_0^{h_{at}} \rho\,dh$$
$$(2.2)$$

Onde foi considerado que a gravidade é constante nesse trecho da atmosfera. Resolvendo a integral em (2.2), teremos a área do triângulo representado no gráfico. Logo:

$$A = \int_0^{h_{at}} \rho\,dh = \frac{1,3 \cdot h_{at}}{2}$$
$$(2.3)$$

Substituindo o resultado de (2.3) em (2.2), teremos:

$$10^5 = 10 \cdot \frac{1,3 \cdot h_{at}}{2}$$
$$\therefore h_{at} = 15384,6\,m$$

Questão 3

Determine a pressão atmosférica a 16 km acima do nível do mar.

Resolução:

A pressão atmosférica varia exponencialmente com a altitude. A expressão da pressão é dada por:

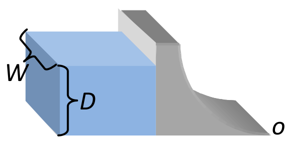
$$P = P_0 e^{-ay}$$
(3.1)

Onde $a = 0,116\,km^{-1}$ e $P_0 \cong 10^5\,N \cdot m^{-2}$ (pressão atmosférica no nível do mar). Assim, utilizando os valores dados na equação (3.1), teremos:

$$P = 10^5\,e^{-0,116 \cdot 16}$$
$$\therefore P \cong 1,56 \cdot 10^4\,N \cdot m^{-2}$$
(3.2)

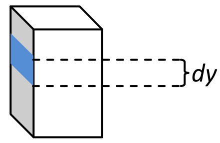
Questão 4

A face vertical de uma barragem retém água D, como mostra a figura. Seja W a largura da barragem. (a) Ache a força horizontal resultante exercida na barragem devido à pressão manométrica da água e (b) o torque da força, devido à pressão manométrica da água, em relação à linha que passa pelo ponto O e que é paralela à largura da barragem. (c) Qual é a linha de ação da força resultante?



Resolução:

a) Seja dF o elemento infinitesimal de força que atua em uma determinada profundidade da barragem. Assim, teremos:



$$dF = \rho g h \cdot W \cdot dh$$
(4.1)

Onde $W \cdot dh$ é o elemento de área. Mas, $h + y = D$, assim teremos:

$$h = D - y;\ dh = -dy$$
(4.2)

Utilizando (4.2) em (4.1), e integrando de D a 0, teremos:

$$dF = \rho g W \int_D^0 (y - D)\,dy$$
$$F = \rho g W \left[\frac{y^2}{2} - Dy\right]_D^0$$
$$\therefore F = \frac{\rho g W D^2}{2}$$
(4.3)

b) Seja $d\Im$ o módulo do elemento de torque com relação ao ponto O. Assim, teremos:

$$d\Im = dF \cdot y$$
$$d\Im = \rho g W (y - D)\,y\,dy$$
(4.4)

Agora integrando a equação (4.4), teremos:

$$\Im = \rho g W \int_D^0 (y^2 - Dy)\,dy$$
$$\Im = \rho g W \left[\frac{y^3}{3} - \frac{Dy^2}{2}\right]_D^0$$
$$\therefore \Im = \frac{\rho g W D^3}{6}$$
(4.5)

c) Agora utilizando os resultados de (4.3) e (4.5), teremos:

$$\Im = F \cdot y$$

$$\frac{\rho g W D^3}{6} = \frac{\rho g W D^2}{2} \cdot y$$

$$\therefore y = \frac{D}{3}$$

(4.6)

Questão 5

Considere um recipiente contendo um líquido com massa específica ρ. O recipiente está apoiado no piso de um elevador. Determine a variação da pressão com a profundidade h nos seguintes casos: (a) o elevador sobe com aceleração a. (b) o elevador desce com aceleração a. (c) o elevador desce em queda livre.

Resolução:

a) Levando em consideração somente a pressão manométrica, teremos:

$$P = \rho g h$$

(5.1)

Porém, para um referencial em um elevador que sobe acelerado, o peso aparente é dado por:

$$W_{ap} = ma + mg \Rightarrow W_{ap} = m(a+g)$$

$$\therefore W_{ap} = mg'; \; g' = a + g$$

(5.2)

Utilizando o resultado de (5.2), teremos:

$$P = \rho g' h$$

$$\therefore P = \rho(a+g)h$$

(5.3)

b) O mesmo pode ser aplicado para um referencial em um elevador que desce acelerado. Para esse caso, o peso aparente é dado por:

$$W_{ap} = mg''; \; g'' = g - a$$

(5.4)

Logo, utilizando o resultado de (5.4), teremos:

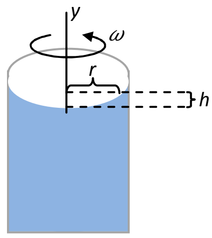
$$P = \rho g'' h \therefore P = \rho(g-a)h \quad (5.5)$$

c) Para um elevador que cai em queda livre, P = 0.

Se for levada em conta a pressão atmosférica, basta soma-la em todos os resultados.

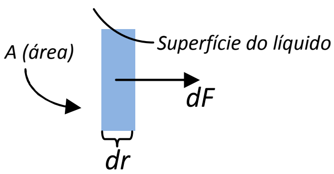
Questão 6

Um recipiente cilíndrico que contém um líquido incompressível gira com velocidade angular ω constante em torno de seu eixo de simetria, o qual vamos considerar como o eixo Oy (ver figura). a) Mostre que a pressão a uma dada altura no interior do líquido cresce com a distância radial r (para fora do eixo de rotação) de acordo com $\partial P/\partial r = \rho\omega^2 r$. b) Integre esta equação diferencial parcial para achar a pressão em função da distância ao eixo de rotação ao longo de uma linha horizontal para y = 0. c) Combine a resposta da parte b) com a equação $P_2 - P_1 = -\rho g(y_2 - y_1)$ para mostrar que a superfície do líquido que gira possui uma forma parabólica, ou seja, a altura do líquido é dada por $h(r) = \omega^2 r^2/2g$. (Esta técnica é usada para fabricar espelhos parabólicos para telescópios; o vidro líquido gira e depois é solidificado enquanto está girando.).



Resolução:

a) Seja o elemento de fluido representado na figura abaixo.



O elemento de força centrípeta infinitesimal que o elemento de fluido exerce é dado por:

$$dF = dm \cdot \omega^2 r$$

(6.1)

Agora, tomando a definição de pressão, teremos:

$$dF = \rho \cdot A \cdot \omega^2 r \cdot dr;\ dm = \rho \cdot A \cdot dr$$
$$\frac{dF/A}{dr} = \rho\omega^2 r \Rightarrow \frac{dP}{dr} = \rho\omega^2 r$$
(6.2)

Onde A é a área da base do elemento de fluido. Como a pressão não é função apenas da variável radial, podemos concluir então:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho\omega^2 r$$
(6.3)

b) Integrando a equação (6.3), teremos:

$$P = \rho\omega^2 \int_0^r r' dr'$$
$$P = \frac{\rho\omega^2 r^2}{2} + const.$$
(6.4)

Para r = 0 a pressão exercida na superfície do líquido é a pressão atmosférica. Portanto, teremos:

$$P = \frac{\rho\omega^2 r^2}{2} + P_0$$
(6.5)

Com a vertical a pressão varia de acordo com a equação:

$$P = P_0 + \rho g h$$
(6.6)

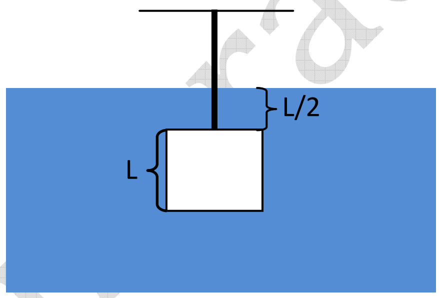
Tomando a superfície do líquido, teremos:

$$P_0 + \rho g h = P_0 + \frac{\rho\omega^2 r^2}{2}$$
$$\therefore h = \frac{\omega^2 r^2}{2g}.$$
(6.7)

Questão 7

Um objeto cúbico cuja dimensão lateral é L (0,6m) e peso W (4000 N), no vácuo, é suspenso por uma corda em um tanque aberto, com água de densidade ρ (1,0 g·cm^{-3}), como indica a figura. (a) Determine a força total descendente exercida pela água e pela atmosfera no topo do objeto de área A (0,36 m^2). (b) Determine a força total na base do objeto. (c) Determine a tensão na corda.

Resolução:



a) A força total exercida pela atmosfera e pela água é dada por:

$$F_{T1} = P \cdot A$$
$$F_{T1} = \left(10^5 + \rho g h\right) A$$
$$F_{T1} = \left(10^5 + 10^3 \cdot 9,8 \cdot 0,3\right) \cdot 0,36$$
$$\therefore F_{T1} = 3,71 \cdot 10^4 N.$$
(7.1)

b) A força total exercida pela atmosfera e pela água na base inferior é dada por:

$$F_{T2} = P \cdot A$$
$$F_{T2} = \left(10^5 + 10^3 \cdot 9,8 \cdot 0,9\right) \cdot 0,36$$
$$\therefore F_{T2} = 3,92 \cdot 10^4 N$$
(7.2)

c) A tensão na corda dada por:

$$T = F_{T1} + W - F_{T2}$$
$$T = 3,71 \cdot 10^4 + 4000 - 3,92 \cdot 10^4$$
$$\therefore T = 1900 N$$
(7.3)

Questão 8

Uma esfera é feita de um material de massa específica d e volume V. Determine o volume V' da cavidade esférica existente em seu interior para que ela flutue num líquido de massa específica ρ, mantendo uma fração V/n do seu volume dentro do líquido.

Resolução:

Para que a esfera permaneça equilibrada com uma fração de seu volume dentro do líquido, o peso dela deve ser igual, em módulo, ao empuxo que nela atua. Assim, teremos:

$$E = W$$
$$\rho g \cdot \frac{V}{n} = mg$$
$$m = \frac{\rho V}{n}$$

(8.1)

Onde m é a massa da esfera. A massa, por sua vez, pode ser determinada pela relação da massa específica da esfera. Assim, teremos:

$$m = d\left(V - V'\right)$$

(8.2)

Agora, combinando o resultado de (8.1) e a eq. (8.2), teremos:

$$V - V' = \frac{\rho V}{nd}$$
$$V' = \left(1 - \frac{\rho}{nd}\right)V$$

(8.3)

Questão 9

Uma esfera oca de ferro flutua quase completamente imersa na água. O seu diâmetro externo mede 50 cm e a massa específica do ferro vale 7,8 g·cm^{-3}. Calcule o diâmetro interno da esfera.

Resolução:

O empuxo sobre a esfera deve equilibrar com o peso da mesma. Assim, teremos:

$$\rho_{H_2O} g V = mg,\ V = \frac{4\pi R_{ext}^3}{3} \cong 0{,}021\pi m^3$$
$$m \cong 21\pi kg$$

(9.1)

Onde m é a massa da esfera. Com a massa poderemos determinar o volume da parte interna e assim, o raio. Logo,

$$m = \mu_{Fe} \cdot V_{Fe}$$
$$21\pi = 7{,}8 \cdot 10^3 V_{Fe}$$
$$V_{Fe} = \frac{21\pi}{7{,}8 \cdot 10^3}\ m^3$$

(9.2)

Agora podemos calcular o raio interno e consequentemente o diâmetro interno da esfera. Assim, teremos:

$$V_{Fe} = \frac{4\pi}{3}\left(R_{ext}^3 - R_i^3\right)$$
$$\frac{21}{7{,}8 \cdot 10^3} = 0{,}021 - \frac{4R_i^3}{3}$$
$$R_i \cong 0{,}239\,m \Rightarrow R_i \cong 23{,}9\,cm$$
$$\therefore D_i \cong 47{,}8\,cm.$$

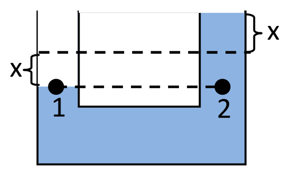
(9.3)

Questão 10

Um tubo em U contém um líquido homogêneo. Durante certo tempo, um êmbolo faz baixar o nível do líquido em um dos ramos. Retirando o pistão, os níveis do líquido nos dois ramos oscilam. Mostre que o período de oscilação é $\pi\sqrt{\frac{2L}{g}}$, sendo L o comprimento total do líquido no tubo.

Resolução:

A força exercida pela coluna de líquido (2) no ponto (1) é dada por:



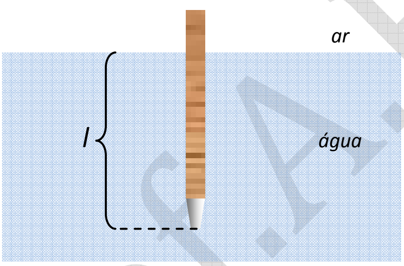
$$P \cdot A = -\rho g 2x \cdot A$$
(10.1)

Onde A é a área transversal do tubo e o sinal negativo indica que a força aponta no sentido contrário ao deslocamento. Essa força vai acelerar toda a massa do líquido. Assim, teremos:

$$m \cdot a = -\frac{m}{A \cdot L} \cdot g \cdot 2x \cdot A$$
$$a = -\frac{2gx}{L} \Rightarrow \omega^2 = \frac{2g}{L}$$
$$\therefore T = \pi\sqrt{\frac{2L}{g}}.$$
(10.2)

Questão 11

Um bastão cilíndrico, de madeira, é lastreado com chumbo em uma extremidade, de maneira que ele flutue verticalmente na água, como mostra a figura. A parte submersa mede l = 2,4 m. O bastão é posto em oscilação vertical. (a) Mostre que o movimento é harmônico simples. (b) Determine o período em segundos. Despreze o amortecimento que a água produz nas oscilações.



Resolução:

a) Previamente, analisemos a situação de equilíbrio.

$$E = P$$
$$\rho_{H_2O} \cdot g \cdot A \cdot l = mg$$
$$\rho_{H_2O} \cdot A \cdot l = A \cdot L \cdot \rho_M$$
$$L \cdot \rho_M = 2{,}4 \cdot 10^3$$
(11.1)

Onde L é o comprimento total da haste.

Agora, utilizando as relações dadas por (11.1), para um deslocamento x, a força resultante na madeira será dada por:

$$ma = -\rho_{H_2O} \cdot g \cdot V + mg$$
$$ma = -\rho_{H_2O} \cdot g \cdot A(l + x) + \rho_{H_2O} \cdot g \cdot A \cdot l$$
$$ma = -\rho_{H_2O} \cdot g \cdot A \cdot x$$
$$A \cdot L \cdot \rho_M \cdot a = -\rho_{H_2O} \cdot g \cdot A \cdot x$$
$$\therefore a = -\frac{\rho_{H_2O} \cdot g}{L \cdot \rho_M} x$$
(11.2)

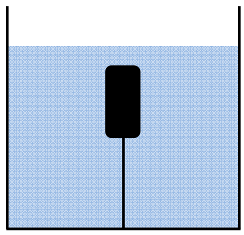
O resultado de (11.2) mostra que sendo a aceleração negativa (com relação ao deslocamento x) o movimento será harmônico simples.

b) Agora utilizando os dados, teremos:

$$a = -4x \Rightarrow \omega = 2\, rad \cdot s^{-1}$$
$$\therefore T = \pi\, s$$
(11.3)

Questão 12

A tensão em uma corda prendendo um bloco maciço abaixo da superfície de um líquido (de densidade maior que o bloco) é T_0 quando o vaso que o encerra (figura) está em repouso. Mostre que a tensão T, quando o vaso sofre uma aceleração ascendente vertical a, é dada por $T_0\left(1 + a/g\right)$.



Resolução:

Na condição de equilíbrio, temos:

$$T_0 + w = E$$
$$\therefore T_0 = \rho_{H_2O} gV - mg$$
(12.1)

Onde V e m são respectivamente, o volume e a massa do bloco. Quando o vaso sobe acelerado, com aceleração "a", para um referencial dentro do vaso (referencial não inercial), o peso aparente é dado por:

$$w_{ap} = m(a+g)$$
(12.2)

Logo, como o empuxo é igual ao peso do fluido deslocado, podemos concluir:

$$E_{ap} = \rho_{H_2O}(a+g)V$$
(12.3)

A aceleração se adiciona com a aceleração da gravidade a exemplo das velocidades com sentidos opostos. Ainda para o referido referencial, para a condição de equilíbrio, teremos:

$$T + w_{ap} = E_{ap}$$
$$T = \rho_{H_2O}(a+g)V - m(a+g)$$
$$T = \rho_{H_2O}gV - mg + \rho_{H_2O}aV - ma$$
$$T = T_0 + a\left(\rho_{H_2O}V - m\right)$$
$$\therefore T = T_0\left(1+\frac{a}{g}\right)$$
(12.4)

Questão 13

Ache a pressão manométrica em pascals em uma bolha de sabão com diâmetro igual a 3,00 cm. A tensão superficial é igual a 25,0 x 10^{-3}N·m^{-1}.

Resolução:

Para uma bolha de sabão, a pressão manométrica será dada por:

$$p = \frac{4\gamma}{R}$$
(13.1)

Onde γ é a tensão superficial e R o raio da bolha. Assim, substituindo os valores dados, teremos:

$$p = \frac{4\cdot 25\cdot 10^{-3}}{3\cdot 10^{-2}} \therefore p = \frac{10}{3}N\cdot m^{-2}$$
(13.2)

Questão 14

Calcule o excesso de pressão a 20 ^{0}C a) no interior de uma gota de chuva grande com raio igual a 1,00 mm; b) no interior de uma gota de água com raio igual a 0,0100 mm (típica de uma gotícula no nevoeiro).

Resolução:

Para uma gota de líquido, a diferença de pressão entre a parte interna e a parte externa é dada por:

$$p - p_a = \frac{2\gamma}{R}$$
(14.1)

Onde γ é a tensão superficial e p_a é a pressão atmosférica (externa).

a) Para uma gota de água, a tensão superficial a 20^{0}C vale: 72,8 mN·m^{-1}. Assim, teremos:

$$p - p_a = \frac{2\cdot 72,8\cdot 10^{-3}}{10^{-3}}$$
$$\therefore p - p_a = 145,6N\cdot m^{-2}.$$
(14.2)

b) De forma semelhante, teremos:

$$p - p_a = \frac{2\cdot 72,8\cdot 10^{-3}}{0,01\cdot 10^{-3}}$$
$$\therefore p - p_a = 1,456\cdot 10^4 N\cdot m^{-2}$$
(14.3)