Questão 1

A vazão volumétrica de um rio é igual a $900 m^3 \cdot s^{-1}$. (a) Ache a vazão mássica do rio. (b) Se as águas deste rio se projetarem numa queda de 50 m de altura, qual é a potência disponível na base da queda?

Resolução:

a) A vazão mássica, para fluidos incompressíveis, é dada por:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d(\rho \cdot V)}{dt} = \rho \cdot \frac{dV}{dt}$$
$$\therefore \frac{dm}{dt} = \rho \cdot R;\ R = \frac{dV}{dt}$$
(1.1)

Onde ρ e R são, respectivamente, a densidade e a vazão volumétricas do fluido. Utilizando a densidade volumétrica da água e o valor da vazão volumétrica na eq. (1.1), teremos:

$$\frac{dm}{dt} = 10^3 \cdot 900 = 9 \cdot 10^5 kg \cdot s^{-1}$$
(1.2)

b) A potência é dada por:

$$Pot = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot g \cdot h) = g \cdot h \cdot \frac{dm}{dt}$$
(1.3)

Com o valor da gravidade de $9,8 m \cdot s^{-2}$, na eq.(1.3), teremos:

$$Pot = 9,8 \cdot 50 \cdot 9 \cdot 10^5$$
$$\therefore Pot \cong 440 MW$$
(1.4)

Questão 2

A mangueira de um jardim possui um diâmetro de 2 cm e está ligada a um irrigador que consiste num recipiente munido de 20 orifícios, cada um dos quais com diâmetro de 0,14 cm. A velocidade da água na mangueira vale $0,85 m \cdot s^{-1}$. Calcule a velocidade da água ao sair dos orifícios.

Resolução:

Utilizando a equação da continuidade para fluidos incompressíveis, teremos:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$
$$\frac{\cancel{\pi} D^2}{\cancel{4}} \cdot 0,85 = 20 \cdot \frac{\cancel{\pi} d^2}{\cancel{4}} \cdot v_2$$
$$4 \cdot 0,85 = 20 \cdot (0,14)^2 v_2$$
$$\therefore v_2 \cong 8,67 m \cdot s^{-1}.$$
(2.1)

Obs.: Na resolução (2.1) não foi necessário utilizar o valor do diâmetro no SI.

Questão 3

O êmbolo no interior de um tubo vertical empurra uma coluna de $0,2 m^3$ de água com uma velocidade de $1,0 m \cdot s^{-1}$, no sentido de baixo para cima. O êmbolo se desloca até uma altura de 8 m, em relação ao nível inicial. O tubo está aberto para a atmosfera somente na sua parte superior. O diâmetro do tubo é igual a 10 cm. Calcule: (a) a vazão volumétrica da água, (b) a vazão mássica da água, (c) o trabalho realizado pelo êmbolo sobre a coluna de água, (d) a potência desenvolvida pelo êmbolo.

Resolução:

a) A vazão volumétrica é dada por:

$$R = \frac{dV}{dt} = \frac{d(A \cdot h)}{dt} = A \cdot \frac{dh}{dt}$$
$$\therefore R = A \cdot v$$
(3.1)

Utilizando os dados na expressão (3.1), teremos:

$$R = \frac{\pi D^2}{4} \cdot v \Rightarrow R = \frac{\pi \cdot 10^{-2}}{4} \cdot 1$$
$$\therefore R \cong 7,85 \cdot 10^{-3} m^3 \cdot s^{-1}$$
(3.2)

b) Utilizando o resultado de (1.1), teremos:

$$\frac{dm}{dt} = 10^3 \cdot 7,85 \cdot 10^{-3}$$
$$\therefore \frac{dm}{dt} = 7,85\, kg \cdot s^{-1}$$
(3.3)

c) O trabalho vale:

$$W = mgh = \rho V g h$$
$$W = 10^3 \cdot 0,2 \cdot 9,8 \cdot 8$$
$$\therefore W \cong 1,57 \cdot 10^4 J$$
(3.4)

d) Para a potência teremos:

$$Pot = \frac{dW}{dt} = \rho \cdot g \cdot h \cdot R$$
(3.5)

Ou

$$Pot = g \cdot h \cdot \frac{dm}{dt}$$
(3.6)

Utilizando a expressão (3.6), por exemplo, teremos:

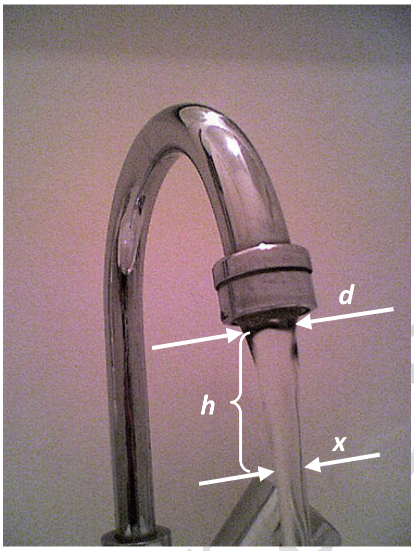
$$Pot = 9,8 \cdot 8 \cdot 7,85$$
$$\therefore Pot = 615,44 W$$
(3.7)

Questão 4

Água escoa, à velocidade inicial v_0, continuamente, através do cano de uma torneira que possui diâmetro interno d. Determinar o diâmetro do jato d'água, em função da distância h, abaixo da torneira. (Despreze a resistência do ar e suponha que não se formem gotículas).

Resolução:

Podemos utilizar a equação da continuidade para um líquido incompressível, conforme a resolução (2.1). Mas previamente, devemos determinar a velocidade da água na distância h, abaixo da torneira. Considere a figura a seguir.



Utilizando a conservação da energia mecânica, teremos:

$$E_0 = E$$
$$\cancel{m}gh + \frac{\cancel{m}v_0^2}{2} = \frac{\cancel{m}v_h^2}{2}$$
$$\therefore v_h = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$
(4.1)

Agora utilizando a equação da continuidade (2.1) teremos:

$$A_0 v_0 = A_h v_h$$
$$\frac{\cancel{\pi} d^2}{\cancel{4}} \cdot v_0 = \frac{\cancel{\pi} x^2}{\cancel{4}} \cdot \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$
$$\therefore x = d \cdot \left[\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}} \right]^{1/2}$$
(4.2)

Questão 5

Em um oleoduto horizontal, de área transversal constante, a pressão decresce de 0,34 atm entre dois pontos distanciados de 300 m. Qual a perda de energia, por litro de óleo e por unidade de distância?

Resolução:

Sejam 1 e 2 os pontos em questão. Assim, temos, pela equação de Bernoulli:

$$p_1+\frac{\rho v_1^2}{2}=p_2+\frac{\rho v_2^2}{2}\Rightarrow p_2-p_1=\rho\left(\frac{v_1^2}{2}-\frac{v_2^2}{2}\right)$$

$$-0,34\cdot 1,01\cdot 10^5=\frac{-\Delta K}{V}$$

$$\therefore \frac{\Delta K}{V}=34340\,J\cdot m^{-3}$$

(5.1)

Mas 1l=10^{-3}m^3, então de (5.1), teremos:

$$\frac{\Delta K}{V}=34,34\,J\cdot l^{-1}$$

(5.2)

Como os pontos estão distanciados de 300 m, de (5.2), teremos:

$$\frac{\Delta K/V}{d}=\frac{34,34}{300}$$

$$\frac{\Delta K}{V\cdot d}=0,1145\,J\cdot l^{-1}\cdot m^{-1}$$

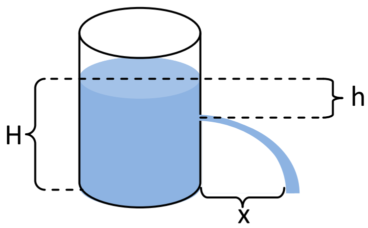
(5.3)

Obs.: Penso que no enunciado desta questão, a pressão deveria aumentar e não diminuir. Assim o resultado (5.3), seria negativo, representado uma efetiva perda de energia no escoamento.

Questão 6

Um tanque contém água até a altura *H*. É feito um pequeno orifício, na sua parede, à profundidade *h* abaixo da superfície da água (ver figura). (a) Mostre que a distância *x* da base da parede até onde o jato atinge o solo é dada por $x=\sqrt{2h(H-h)}$. (b) Poder-se-ia ter perfurado em outra profundidade de modo que este segundo jato tivesse o mesmo alcance? Em caso afirmativo, a que profundidade?

Resolução:



a) Podemos determinar a velocidade com que o jato de água parte do orifício. Assim, utilizando a equação de Bernoulli, teremos:

$$p_{atm}+\rho gh=p_{atm}+\frac{\rho v^2}{2}$$

$$\therefore v=(2gh)^{1/2}$$

(6.1)

O tempo de queda do jato de água é dado por:

$$t_q=\left[\frac{2(H-h)}{g}\right]^{1/2}$$

(6.2)

Com as expressões do tempo de queda e da velocidade horizontal dadas em (6.1) e (6.2) teremos:

$$x=(2gh)^{1/2}\cdot\left[\frac{2(H-h)}{g}\right]^{1/2}$$

$$\therefore x=2\left[h(H-h)\right]^{1/2}.$$

(6.3)

b) Sejam h e y as profundidades que produzem o mesmo alcance horizontal. Assim, teremos:

$$x(y)=x(h)$$

$$y(H-y)=h(H-h)$$

(6.4)

Assim, de (6.4), teremos para y:

$$y=h$$

$$ou$$

$$y=H-h$$

(6.5)

Ou seja, a uma altura h da base do tanque.

Questão 7

A superfície superior da água em uma “chaminé de equilíbrio” fica à altura H do solo. (a)

Determinar a que profundidade h deveria ser feito um pequeno orifício para que a água que sair por ele atinja o solo à distância máxima da base da chaminé. (b) Qual é esta distância máxima?

Resolução:

a) Vamos utilizar o resultado de (6.3). Para determinar o ponto de máxima podemos, por exemplo, tomar a derivada da função. Assim, teremos:

$$\frac{dx}{dh}=\frac{H-2h}{\sqrt{h(H-h)}};\ \frac{dx}{dh}=0$$

$$\therefore h=\frac{H}{2}$$

(7.1)

Ou ainda, poderíamos tomar a função quadrática dentro do radical:

$$x=2\sqrt{hH-h^2}$$

(7.2)

Com a função quadrática, podemos determinar o vértice da parábola, uma vez que a mesma tem a concavidade voltada para baixo. O vértice dessa parábola se encontra entre as duas raízes. Assim, teremos:

$$hH-h^2=0\Rightarrow h=0\ ou\ h=H$$

$$\therefore h_{máx}=\frac{H}{2}$$

(7.3)

b) O alcance máximo será então:

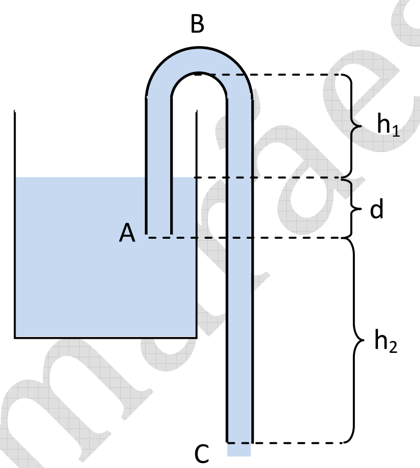
$$x_{máx}=2\sqrt{\frac{H}{2}\left(H-\frac{H}{2}\right)}$$

$$\therefore x_{máx}=H$$

(7.4)

Questão 8

Um sifão é um dispositivo para remover líquidos de um recipiente que não pode ser tombado. Ele funciona como mostra a figura a seguir. O tubo deve ser inicialmente cheio, mas tão logo isto tenha sido feito, o líquido escoará até que seu nível paire abaixo da abertura do tubo em A. O líquido tem densidade ρ e viscosidade desprezível. (a) Com que velocidade o líquido sai do tubo em C? (b) Qual é a pressão no líquido no ponto máximo B? (c) Qual é a maior altura possível h_1 que um sifão pode fazer subir a água?



Resolução:

a) Utilizando a equação de Bernoulli para os pontos A e C, teremos:

$$p_A+\frac{\rho v_A^2}{2}+\rho g y_A=p_C+\frac{\rho v_C^2}{2}+\rho g y_C$$

$$p_{atm}+\rho g d+\rho g h_2=p_{atm}+\frac{\rho v_C^2}{2}$$

$$\therefore v_C=\left[2g\left(d+h_2\right)\right]^{1/2}$$

(8.1)

b) Da mesma forma que foi feito no item (a), teremos:

$$p_B=p_{atm}-\rho g h_1-\frac{\rho v_B^2}{2}$$

(8.2)

c) Se a pressão no ponto "C" for igual a pressão atmosférica, e equilibrar a pressão da coluna de líquido teremos:

$$p_C=p_{atm}=\rho g\left(h_1+d+h_2\right)\therefore h_1=\frac{p_{atm}}{\rho g}-d-h_2$$

(8.3)

Questão 9

Calcular a velocidade com que um líquido sai de um orifício feito em um tanque, levando em conta a velocidade da superfície superior do líquido, do seguinte modo. (a) Mostrar, partindo da equação de Bernoulli, que

$$v_0^2 = v^2 + 2gh$$

sendo v a velocidade da superfície superior. (b) Considerar depois o escoamento como um grande tubo de escoamento e obtenha v/v_0 a partir de continuidade, de modo que

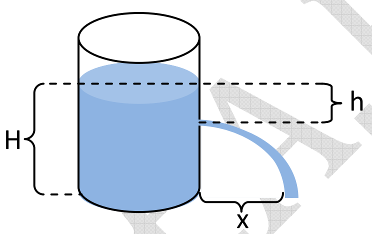
$$v_0 = \sqrt{2gh \Big/ \left[1-\left(A_0/A\right)^2\right]},$$

sendo A a seção reta no topo e A_0 a do orifício. (c) Demonstrar então que, se o orifício for pequeno, em relação à área da superfície,

$$v_0 \cong \sqrt{2gh}\left[1+\frac{1}{2}\left(A_0/A\right)^2\right]$$

Resolução:

a) Considere a figura a seguir.



Aplicando a equação de Bernoulli, teremos:

$$p_{\sup} + \frac{\rho v_{\sup}^2}{2} + \rho g h = p_{ori} + \frac{\rho v_{ori}^2}{2};\ p_{\sup} = p_{ori} = p_{atm}$$
$$\therefore v_{ori}^2 = v_{\sup}^2 + 2gh \Rightarrow v_0^2 = v^2 + 2gh$$

(9.1)

b) Utilizando a equação da continuidade teremos:

$$A_{ori} v_{ori} = A_{\sup} v_{\sup}$$
$$\therefore \frac{v_{\sup}}{v_{ori}} = \frac{A_{ori}}{A_{\sup}} \Rightarrow \frac{v}{v_0} = \frac{A_0}{A}$$

(9.2)

Utilizando o resultado de (9.2) no resultado de (9.1), teremos:

$$v_0^2 \cdot \frac{A_0^2}{A^2} + 2gh = v_0^2$$
$$\therefore v_0 = \left[2gh \Big/ \left(1-\frac{A_0^2}{A^2}\right)\right]^{1/2}$$

(9.3)

c) Do resultado de (9.3), podemos escrever:

$$v_0 = \left[2gh \Big/ \left(1-\frac{A_0^2}{A^2}\right)\right]^{1/2} = (2gh)^{1/2} \cdot \left(1-\frac{A_0^2}{A^2}\right)^{-1/2}$$

(9.4)

Agora, levando em consideração que $A_0 < A$, teremos:

$$\left(1-\frac{A_0^2}{A^2}\right)^{-1/2} \cong 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{A_0^2}{A^2}$$

(9.5)

Substituindo o resultado de (9.5) em (9.4), teremos:

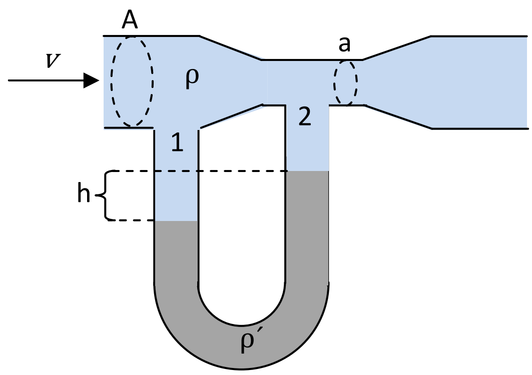
$$v_0 \cong \sqrt{2gh} \cdot \left(1+\frac{A_0^2}{2A^2}\right)$$

(9.6)

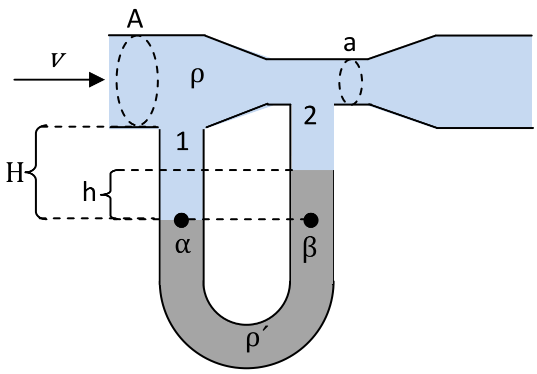
Questão 10

Aplicando a equação de Bernoulli e a equação de continuidade aos pontos 1 e 2 da figura a seguir, mostrar que a velocidade de escoamento na entrada é:

$$v = a\sqrt{\frac{2(\rho' - \rho)gh}{\rho\left(A^2 - a^2\right)}}$$



Resolução:



Os pontos α e β possuem a mesma pressão. Assim, teremos:

$$p_\alpha = p_\beta$$
$$p_1 + \rho g H = p_2 + \rho g(H-h) + \rho' g h$$
$$p_1 - p_2 = gh(\rho' - \rho)$$
(10.1)

Em (10.1), considerou-se que os pontos 1 e 2 se encontram no mesmo nível. Agora utilizando a equação de Bernoulli, teremos para os pontos 1 e 2:

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$
(10.2)

Agora, utilizando os resultados de (10.1), (10.2) e a equação de continuidade para os pontos 1 e 2, teremos:

$$2gh(\rho' - \rho) = \rho v_1^2\left(\frac{A^2}{a^2} - 1\right)$$
$$\therefore v_1 = a\left[\frac{2gh(\rho' - \rho)}{\rho\left(A^2 - a^2\right)}\right]^{1/2}$$
(10.3)

Questão 11

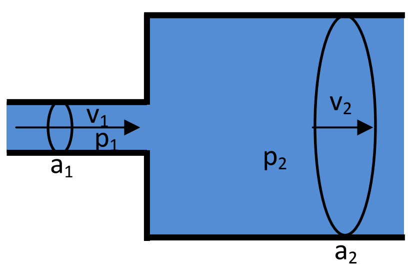
(a) Consideremos um fluido de massa específica ρ, que escoa com velocidade v_1 e passa abruptamente de um conduto cilíndrico de área transversal a_1 para outro conduto de maior diâmetro e área transversal a_2 (ver figura a seguir). O jato de líquido que emerge do contudo estreito mistura-se com o que se encontra na canalização maior, depois do que ele escoa quase uniformemente com velocidade média v_2. Sem preocupar-se com os pormenores, aplique o conceito de momento linear para demonstrar que o aumento de pressão devido à mistura é aproximadamente igual a:

$$p_2 - p_1 = \rho v_2(v_1 - v_2).$$

(b) Demonstre, partindo do princípio de Bernoulli, que em um conduto cuja seção aumente gradualmente a diferença seria:

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\rho\left(v_1^2 - v_2^2\right)$$

e explique a perda de pressão devida ao alargamento brusco do conduto. Pode-se fazer uma analogia com os choques elásticos e inelásticos da mecânica da partícula?



Resolução:

a) Utilizando a 2ª Lei de Newton, teremos:

$$\vec{F}_R = \frac{d\vec{P}}{dt} \Rightarrow F_R = -\frac{\Delta P}{\Delta t}$$
$$F_R = \frac{m(v_1 - v_2)}{\Delta t}$$
$$F_R = \frac{\rho V(v_1 - v_2)}{\Delta t}$$
(11.1)

Mas, $\frac{V}{\Delta t} = v \cdot a$. Onde a é a área da seção reta. Assim teremos, para (11.1):

$$F_R = \rho v_2 a_2 (v_1 - v_2);\ F_R = (p_2 - p_1) a_2$$
$$\therefore p_2 - p_1 = \rho v_2 (v_1 - v_2)$$
(11.2)

b) Utilizando a equação de Bernoulli, teremos:

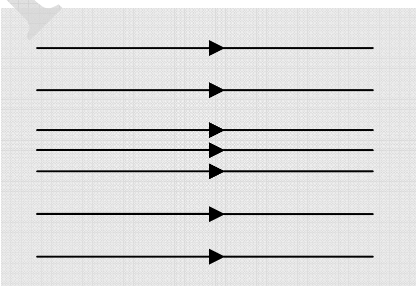
$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}$$
$$\therefore p_2 - p_1 = \frac{\rho}{2} \cdot (v_1^2 - v_2^2)$$
(11.3)

Questão 12

A velocidade de um líquido, no *escoamento Poiseuille* indicado na figura, é dada por:

$$v = v_C - kr^2,$$

onde v_C é a velocidade no centro de um tubo de raio R = 0,5 cm, k = 8,4 $cm^{-1} \cdot s^{-1}$ e r é a distância (em cm) até o centro do tubo. Por causa da viscosidade do líquido, a velocidade na superfície interna do tubo é igual a zero. Calcule a velocidade v_C no centro do tubo.



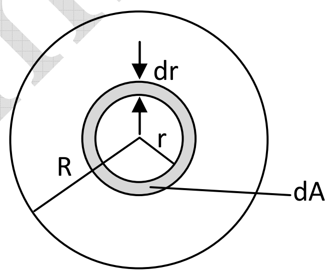
Resolução:
Tomando a velocidade na superfície interna do tubo igual a zero, teremos:

$$v = v_C - kr^2$$
$$0 = v_C - 8,4 \cdot 0,5^2$$
$$\therefore v_C = 2,1\, cm \cdot s^{-1}$$
(12.1)

Questão 13

Considere o problema anterior. (a) Obtenha uma expressão para o cálculo da vazão volumétrica do líquido. (b) Levando em conta os dados numéricos do problema anterior, calcule o valor da vazão volumétrica do líquido.

Resolução:
a) Tomando a seção reta do tubo teremos:



Onde dA é o elemento de área dado por:

$$dA = 2\pi r \cdot dr$$
(13.1)

A vazão é dada por:

$$R = v \cdot A$$
(13.2)

Assim, de (13.1) e (13.2), teremos:

$$R = \int_0^R v \cdot dA = \int_0^R (v_C - kr^2) 2\pi r \cdot dr$$
$$R = 2\pi \int_0^R (v_C r - kr^3) dr$$
$$\therefore R = 2\pi \left[\frac{v_C R^2}{2} - \frac{kR^2}{4} \right]$$
(13.3)

b)

$$R = 2\pi\left[\frac{2{,}1\cdot 0{,}5^2}{2} - \frac{8{,}4\cdot 0{,}5^4}{4}\right]$$

$$\therefore R \cong 0{,}82\,cm^3\cdot s^{-1}$$

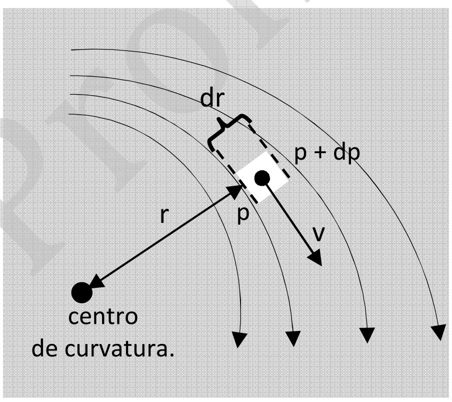
(13.4)

Questão 14

Quando, em um escoamento, existem curvas muito fechadas, os efeitos centrífugos são apreciáveis. Considere um elemento de fluido que se mova com velocidade v ao longo de uma linha de corrente de um escoamento curvo em um plano horizontal (ver figura). (a) Demonstrar que

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\rho v^2}{r},$$

e portanto a pressão aumenta de $\rho v^2/r$ por unidade de comprimento perpendicular à linha de corrente, quando se passa da parte côncava para a convexa da linha de corrente. (b) Utilizar este resultado e a equação de Bernoulli para demonstrar que $v\cdot r$ é constante e que portanto a velocidade aumenta para o centro de curvatura. Logo, as linhas de corrente que sejam uniformemente espaçadas em um conduto retilíneo se comprimirão perto da parede interna de um conduto curvo e se afastarão perto da parede externa.



Resolução:

a) A resultante centrípeta que atua no elemento de massa do líquido (dm) é dada por:

$$dF_{CP} = \frac{dm\cdot v^2}{r}$$

(14.1)

A resultante centrípeta advém da diferença de pressão (dp) nas áreas laterais do elemento de massa do líquido (A). Assim teremos:

$$A\cdot dp = \frac{\rho\cdot dV\cdot v^2}{r};\ dV = A\cdot dr$$

$$\therefore \frac{dp}{dr} = \frac{\rho v^2}{r}$$

(14.2)

b) Da equação de Bernoulli temos:

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g y = constante$$

(14.3)

Agora, derivando (14.3), com relação a r teremos:

$$\frac{dp}{dr} + \frac{\rho}{2}\cdot\frac{dv^2}{dr} = 0$$

(14.4)

Utilizando o resultado de (14.2) em (14.4), teremos:

$$\frac{dv^2}{dr} = -\frac{2v^2}{r} \Rightarrow \frac{dv^2}{v^2} = -2\cdot\frac{dr}{r}$$

$$\int\frac{dv^2}{v^2} = -2\int\frac{dr}{r}$$

$$ln\,v^2 + 2ln\,r = constante$$

$$ln\,v\cdot r = constante$$

$$\therefore v\cdot r = constante$$

(14.5)