Lista de Exercícios de Cálculo I do Prof. Jair Salvador

Primeira Edição V1.3
Fevereiro de 2011

Marco A. P. Cabral
Professor do Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro - Brasil

Prefácio

Para o Estudante

Esta lista de exercícios foi compilada pelo Professor Jair Salvador do IM–UFRJ. O Prof. Jair tem larga experiência no ensino de Cálculo e colocou nesta lista uma seleção excelente de exercícios de Cálculo que foram criados por ele e por dezenas de colegas do IM–UFRJ. Esta lista tem prestado um grande serviço aos alunos de Calculo I da UFRJ, principalmente desde o início das provas unificadas de Cálculo em 2008. Como ela era em parte manuscrita, disponível em fotocópias de fotocópia, achei que valia a pena digitalizar (em LaTex) a lista.

Organizei os exercícios da mesma forma que no meu livro **Curso de Cálculo I**, que pode ser usado como fonte de estudo. Nele o aluno encontrará exemplos e muitos outros exercícios resolvidos. O livro **Curso de Cálculo I** e esta lista estão ambos disponíveis, em formato pdf, para serem baixados livremente, em `www.labma.ufrj.br/~mcabral/livros`.

Mande sugestões, erros e solicite o fonte (latex) para o autor Marco Cabral em `mapcabral (at) ufrj (dot) br`.

Softwares Gratuitos e o Cálculo

É interessante utilizar softwares para aprender Cálculo. Vamos apresentar alguns softwares gratuitos que podem ser utilizadas no Windows e no Linux (Ubuntu, Debian, Fedora, etc.).

• `KmPlot`: Software de visualização de gráficos de funções. É nativo do Linux. Similar ao Winplot.

• `Winplot`: Software de visualização de gráficos de funções. É nativo do Windows mas roda com emulação do Wine no Linux. Pode-se visualizar gráficos 2D e 3D dados por função, parametrização explicita e implícita. Pode-se fazer animações.

• `WxMaxima`: Software de computação algébrica. Calcula, de forma exata, limites, derivadas e integrais (entre outras centenas de coisas). Um exemplo é o limite fundamental: `limit(sin(x)/x, x, 0);`. Calcula também derivadas `diff(sin(2*x), x);`, integral `integrate(exp(1/x), x);`, decomposição em frações parciais `partfrac(1/(x**4-1), x);`.

Licença

Sumário

Capítulo 0

Pré-Cálculo

0.1 Pré-Cálculo

1. Encontre uma equação para a reta que passa por:
(a) $(2, -3)$ e tem coeficiente angular -4; (b) $(-4, 2)$ e $(3, -1)$;
(c) $(2, -4)$ e é paralela ao eixo x; (d) $(1, 6)$ e é paralela ao eixo y;
(e) $(4, -2)$ e é paralela à reta $x + 3y = 7$; (f) $(5, 3)$ e é perpendicular à reta $y + 7 = 2x$;
(g) $(-4, 3)$ e é paralela à reta que passa por $(-2, -2)$ e $(1, 0)$.

2. Encontre o ponto de interseção de cada um dos seguintes pares de retas:
(a) $2x + 2y = 2$ e $y = x + 1$; (b) $2x - 3y = 7$ e $6y = -14 + 4x$.

3. Dada a função $f(x) = 2x^2 - 3$, determine:
(a) $f(5)$; (b) $f(0)$; (c) $f(a)$; (d) $f(-1/2)$; (e) $f(\sqrt{3})$;
(f) $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -1$; (g) um esboço do gráfico de $g(x) = |f(x)|$.

4. Determine o domínio de cada uma das funções abaixo:
(a) $y = \dfrac{1}{x^3 - 2}$; (b) $y = \dfrac{3}{\sqrt{x - 1}}$; (c) $y = \dfrac{\sqrt{x - 3}}{x - 1}$;
(d) $y = \sqrt{\dfrac{1 - x^2}{4 + x}}$; (e) $y = \sqrt{x} + \sqrt{x - 2}$; (f) $y = \sqrt{3x - x^2}$.

5. Estude o sinal (determine onde é positiva e onde é negativa) das funções $y = f(x)$:
(a) $y = 3x^2 - 6$; (b) $y = x^2 + 2x + 3$; (c) $y = x^2 + 2x + 1$;
(d) $y = \dfrac{x^2 - 4}{(x - 1)^3}$; (e) $y = \dfrac{2x}{x^2 + 4}$; (f) $y = \dfrac{4(x - 3)}{3\sqrt{(x - 2)^5}}$.

6. Sejam $f(x) = 2x^2 + 3x$, $g(x) = \sqrt{3x^2 + 4}$, $h(x) = \dfrac{1}{x}$ e $m(x) = \operatorname{sen} x$. Determine:
(a) $f(x) + g(x)$; (b) $f(x) \cdot g(x)$; (c) $f(5) - g(2)$; (d) $f(g(x))$;
(e) $h(g(0))$; (f) $f(m(x))$; (g) $f(1)g(0) - m(\pi/2)$.

7. Um cilindro fechado tem área de superfície fixa A. Exprima seu volume como função do raio r da base do cilindro.

8. O perímetro de um triângulo retângulo é 6 e a hipotenusa é x. Exprima a área do triângulo como função de x.

Capítulo 1

Limite

1.1 Limites

1. Calcule:

(a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x)$; (b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt[3]{x^3+1} - x)$; (c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

2. Determine os valores de a e b de modo que

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^2 + bx + 3}{x+1} - ax \right) = 0.$$

Capítulo 2

Continuidade

2.1 Continuidade

1. Determine o valor da constante c para que a função f, dada abaixo, seja contínua em $[0,\ +\infty)$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+\sqrt{x}-2}{x-1}, & 0 \le x < 1, \\ \dfrac{cx+5}{x^2+3}, & x \ge 1. \end{cases}$$

2. Determine os valores de a e b para que a função f, dada abaixo, seja contínua em $[-3,\ 3]$.

$$f(x) = \begin{cases} a, & x = -3, \\ \dfrac{9-x^2}{4-\sqrt{x^2+7}}, & -3 < x < 3, \\ b, & x = 3. \end{cases}$$

3. Dada a função $f(x) = \dfrac{2-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^3-1}$ para $x \neq 1$, defina o valor de $g(1)$ para que a função g seja contínua em $x = 1$, se $g(x) = f(x)$ para $x \neq 1$.

4. Determine os valores de a e b para que a função f, dada abaixo, seja contínua em $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x^4, & x \le -1, \\ ax+b, & -1 < x < 2, \\ x^2+3, & x \ge 2. \end{cases}$$

5. Determine o valor da constante c para que a função f, dada abaixo, seja contínua em $[2,\ +\infty)$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}, & x > 2, \\ c, & x = 2. \end{cases}$$

6. Determine o valor da constante c para que a função f, dada abaixo, seja contínua em $[0,\ +\infty)$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+16}-5}{4-\sqrt{x^2+7}}, & x > 0 \text{ e } x \neq 3, \\ c, & x = 3. \end{cases}$$

7. Determine o valor da constante c para que a função f, dada abaixo, seja contínua em $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}, & x \neq 0, \\ c, & x = 0. \end{cases}$$

Capítulo 3

Derivada

3.1 Derivada Básicos

1. Encontre os valores de a, b e c para que os gráficos das funções definidas por $f(x) = x^2 + ax + b$ e $g(x) = \sqrt[3]{(x^3 - 2x)^2} + c$ se interceptem no ponto $(1, 2)$ e tenham a mesma reta tangente neste ponto.

2. Determine as constantes a e b de modo que $f'(1)$ exista se

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b, & x \leq 1, \\ \dfrac{1}{x^2}, & x > 1. \end{cases}$$

3. Determine as constantes a e b de modo que $f'(2)$ exista se

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 + bx^2, & x \leq 2, \\ \sqrt{x+2}, & x > 2. \end{cases}$$

4. Determine as constantes a e b de modo que $f'(\pi/2)$ exista se

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b, & 0 \leq x \leq \pi/2, \\ \cos x, & \pi/2 < x \leq 2\pi. \end{cases}$$

5. Derive as seguintes funções:
(a) $f(x) = x^3 \operatorname{sen}^2(5x)$; (b) $f(x) = \tan^3(\operatorname{sen} x)$; (c) $f(x) = e^{\sec(2x)}$;
(d) $f(x) = \log(\log x)$; (e) $f(x) = 3\cos^2(e^{-x})$.

6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ com $x \neq 1$,

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} \leq f(x) \leq \frac{x^2 + 3}{2}.$$

Se f é diferenciável em $x = 1$, determine $f(1)$ e $f'(1)$.

7. Determine a derivada (em relação a x) de $x^{\operatorname{arcsen} x}$.

8. Seja f uma função diferenciável num intervalo que contém $x = 0$.
Considere a função $g(x) = |x|f(x)$.
(a) g é contínua em $x = 0$? Justifique.
(b) Determine o valor de $f(0)$ para que g seja diferenciável em $x = 0$. Justifique.

9. As curvas $y = 2\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{x^3 + \pi/2}{x^2 + 1}\right) + ax$ e $y = \sqrt{ax^2 + 6x + b}$ têm a mesma reta tangente no ponto $(0, 2)$. Quais são os valores de a e b?

10. Determine $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{\tan^2(a+h)} - \sqrt[3]{\tan^2 a}}{h}$.

3.2 Teorema do Valor Médio

1. Sendo f' crescente e $f(0) = 0$, mostre que $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ é crescente no intervalo $(0,\ +\infty)$.

3.3 Derivada da Inversa

1. Considere a função $f(x) = x^5 + x^3 + 3x$.
(a) Qual o maior conjunto onde a função inversa existe? Justifique?
(b) Determine $(f^{-1})'(5)$.

2. Mostre que que $f(x) = (x^5 + 7)^{1/3}$ para $x > 0$ é invertível e calcule $(f^{-1})'(2)$. Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de f^{-1} no ponto $(2,\ 1)$.

3. Considere $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x^3}{3} - x\right)$ para $x > 1$.
(a) Mostre que f é invertível e calcule $(f^{-1})'(0)$;
(b) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de f^{-1} no ponto $(0,\ f^{-1}(0))$.

4. Mostre que $f(x) = \arctan(x^2 - 1)$ para $x > 0$ é invertível e calcule $(f^{-1})'(\pi/4)$.

5. Seja $f(x) = e^{x^5+x^3+x}$. Mostre que f é invertível para todo $x \in \mathbb{R}$ e calcule a derivada da função inversa em e^3.

6. Seja $f(x) = \dfrac{1}{\arctan(\log x)}$ para $x > 0$.
(a) Prove que f é invertível e calcule $(f^{-1})'(\pi/2)$.
(b) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de f^{-1} no ponto $(\pi/2,\ f^{-1}(\pi/2))$.

Capítulo 4

Aplicações da Derivada

4.1 Máximo e Mínimo Local

1. Seja f uma função diferenciável tal que $f(x) \leq f(2)$ para todo $x \in [1,3]$. Determine $f'(2)$.

2. Suponha que f e g são funções diferenciáveis no ponto $x = a$ e que $f(a) > 0$ e $g(a) > 0$. Se f e g atingem um valor máximo local em $x = a$, então mostre que $h(x) = f(x)g(x)$ também atinge um valor máximo local em $x = a$.

4.2 L'Hospital

1. Calcule os limites abaixo usando as regras de L'Hospital.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^3+x^2-11x+10}{x^2-x-2}$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3-4x^2+x-1}{3x^2+2x+7}$; (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$;

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$; (e) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{1+\cos(\pi x)}$; (f) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$.

2. Calcule os limites abaixo usando as regras de L'Hospital.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}(\sec x - \tan x)$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1}((1-x)\tan(\pi x/2))$; (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}(5x)}{3x}$;

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan(2x)}$; (e) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/4}\frac{\tan(x-\pi/4)}{x-\pi/4}$; (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sec(x)-1}{x}$.

3. Calcule os limites abaixo usando as regras de L'Hospital.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\mathrm{arcsen}\,x}{\mathrm{sen}^3 x}$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\tan x}\right)$; (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos x}-\frac{2}{\mathrm{sen}^2 x}\right)$;

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^n-1}$; (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)-x}{x-\mathrm{sen}\,x}$; (f) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\mathrm{sen}(x)-\mathrm{sen}(a)}{x-a}$; (g) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$.

4. Calcule os limites abaixo usando as regras de L'Hospital.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\mathrm{sen}\,x)^{\tan x}$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(\tan x)^{1/\log(\mathrm{sen}\,x)}$; (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos(2x))^{1/x^2}$;

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} x^{1/(x-1)}$; (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/\tan x}$; (f) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$.

5. Calcule os limites abaixo usando as regras de L'Hospital.

(a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$; (b) $\lim_{x\to\pi/2} \left(x\tan x - \dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$; (c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}}{\operatorname{sen} x}$;

(d) $\lim_{x\to 1^-} \log(1-x)\tan(1-x)$; (e) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^x}$; (f) $\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x}$.

6. Calcule os limites abaixo usando as regras de L'Hospital.

(a) $\lim_{x\to 0^+} xe^{1/x}$; (b) $\lim_{x\to+\infty} x\operatorname{sen}(\pi/x)$; (c) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\log x}{x^3}$;

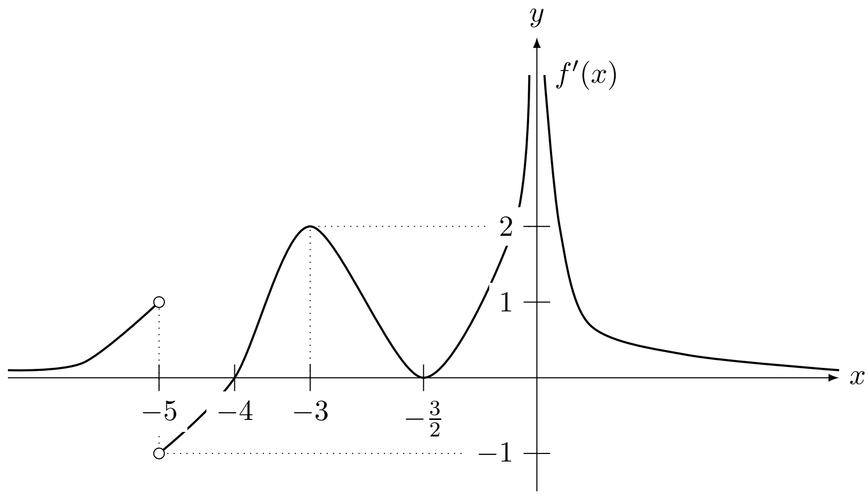
(d) $\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$; (e) $\lim_{x\to 0^+} x^{2/(2+\log x)}$; (f) $\lim_{x\to 1^-} (1-x)^{\cos(\pi x/2)}$.

4.3 Gráficos

1. Seja $y=f(x)$ uma função definida em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, contínua em todo seu domínio e satisfazendo as condições abaixo:

$$f(-5)=2,\ f(-4)=1,\ f(-3)=3,\ f(-3/2)=4 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

Suponha que o gráfico de $f'(x)$ é dado pela figura abaixo:



Responda, justificando, o que se pede:

(a) os intervalos onde f é crescente e onde é decrescente;

(b) os pontos onde a reta tangente ao gráfico de f é horizontal;

(c) os pontos de máximos e mínimos relativos (locais), caso existam;

(d) os intervalos onde o gráfico de f possui concavidade para cima e onde possui concavidade para baixo;

(e) os pontos de inflexão, caso existam;

(f) as assíntotas verticais e horizontais, caso existam;

(g) esboce o gráfico de uma função f que satisfaça todas as condições acima.

2. Esboce os gráficos das funções abaixo indicando: o domínio; as assíntotas, caso existam; os intervalos de crescimento e decrescimento; os extremos relativos e absolutos, caso existam; os intervalos onde o gráfico possui concavidade para cima e para baixo; os pontos de inflexão, caso existam.

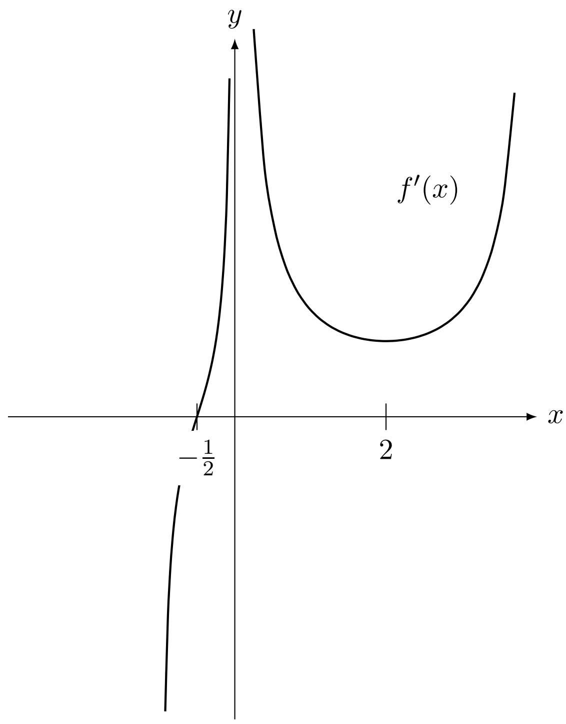
(a) $f(x)=\dfrac{1-x}{x^2}$; (b) $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$; (c) $f(x)=\dfrac{2x}{9-x^2}$;

(d) $f(x) = 1 - \dfrac{x}{(x+2)^2}$; (e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{(x-1)^2}, & x < 1, \\ x^2 - 1, & x \geq 1. \end{cases}$

3. Seja $y = f(x)$ uma função contínua em $\mathbb{R}$ tal que:

$$f(0) = 0, \quad f(2) = 2 \quad \text{e} \quad f(-1/2) = -2.$$

Suponha que o gráfico de f' seja dada pela figura abaixo:

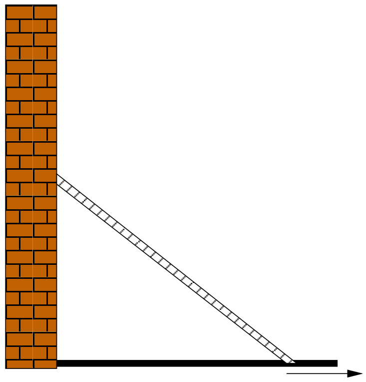


Responda, justificando, o que se pede:
(a) os intervalos onde f é crescente e onde é decrescente;
(b) os pontos onde a reta tangente ao gráfico de f é horizontal;
(c) os pontos de máximos e mínimos relativos (locais), caso existam;
(d) os intervalos onde o gráfico de f possui concavidade para cima e onde possui concavidade para baixo;
(e) os pontos de inflexão, caso existam;
(f) esboce o gráfico de uma função f que satisfaça todas as condições acima.

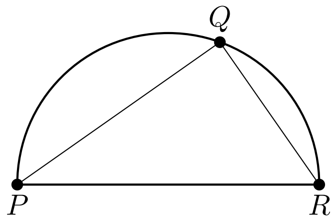
4. Esboce o gráfico das seguintes funções:
(a) $f(x) = xe^{-x}$; (b) $g(x) = x^2e^{-x}$; (c) $h(x) = x \log x$.

4.4 Taxas Relacionadas

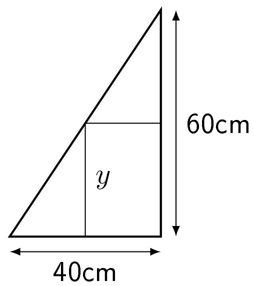
1. Uma escada com 5m de comprimento está apoiada numa parede vertical. Se a base da escada for puxada horizontalmente, afastando-se da parede a 3m/s, qual a velocidade com que a parte superior da escada estará deslizando ao longo da parede, quando a sua base estiver a 3m da parede?



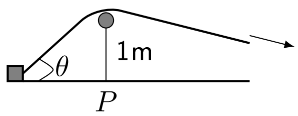
2. Um triângulo PQR está inscrito num semicírculo de diâmetro 15cm conforme a figura abaixo. Sabendo que o vértice Q varia sobre o semicírculo e que o lado QR aumenta à razão de 1 cm/s, determine a taxa com que a área do triângulo varia no instante em que o lado QR mede 12 cm.



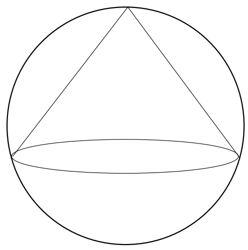
3. Um retângulo possui lados que variam com o tempo e está inscrito numa região triangular conforme a figura abaixo. Determine com que taxa a área do retângulo está variando no instante em que sua altura y mede 36 cm e está aumentando à taxa de 0,5 cm/s. Neste instante a área está aumentando ou diminuindo?



4. Uma caixa está sendo puxada por uma corda que passa por uma roldana presa a 1m acima do solo. Determine a taxa de variação do ângulo θ, indicado na figura abaixo, no instante em que a caixa se encontra a 1m do ponto P, situado abaixo da roldana, sabendo que a caixa se desloca a 2m/min.



5. Um cone está inscrito em uma esfera conforme mostra figura abaixo. Se o raio da esfera está aumentando a uma taxa de 0,9 m/min e a altura do cone está aumentando a uma taxa de 0,8 m/min, com que taxa está aumentando o volume do cone no instante em que o raio da esfera mede 1m e a altura do cone mede 4/3m.



6. Dois carros, um dirigindo-se para o leste à razão de 20m/s e o outro para o sul à razão de 15m/s, estão viajando em direção à interseção das duas rodovias. À que razão os carros aproximam-se um do outro, no instante em que o primeiro (direção leste) estiver a 400m e o segundo (direção sul) a 300m da interseção?

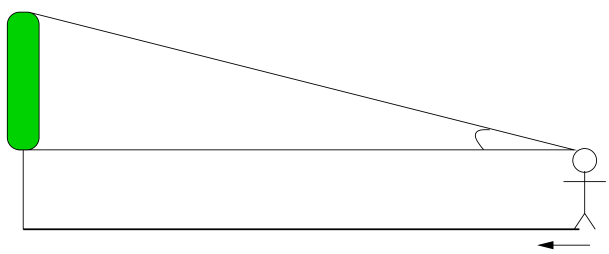
7. Um balão eleva-se verticalmente do solo à razão de 3m/s. Quando o balão está a 48m do solo, passa exatamente sob ele um automóvel viajando a velocidade de 20m/s. Com que velocidade varia, 4(quatro) segundos após, a distância entre eles?

8. Quando o último vagão de um trem passa por baixo de um viaduto, um carro cruza o viaduto numa rodovia perpendicular aos trilhos e a 10m acima deles. O trem está a 20m/s e o carro a 40m/s. Com que velocidade se afastam um do outro após 2s?

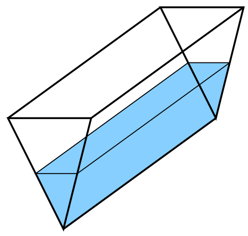
9. Um fusca que viaja à razão de 30m/s aproxima-se de um cruzamento. Quando o fusca está a 120m do cruzamento um caminhão que viaja à razão de 40m/s atravessa o cruzamento. O fusca e o caminhão estão em rodovias que formam um ângulo reto. Com que rapidez separam-se o fusca e o caminhão 2s depois que o caminhão passou pelo cruzamento?

10. Dois lados paralelos de um retângulo aumentam à razão de 2cm/s, mas os outros dois lados diminuem de tal modo que a figura permaneça um retângulo de área constante igual a $50cm^2$. Qual a velocidade com que o perímetro varia quando o lado que aumenta mede 5cm?

11. Um quadro de 1m de altura é colocado em uma parede de tal forma que sua base esteja no mesmo nível dos olhos de um observador que está se aproximando da parede a uma velocidade de 2m/s. Com que velocidade a medida do ângulo de visão do quadro estará variando quando o observador estiver a 2m da parede?



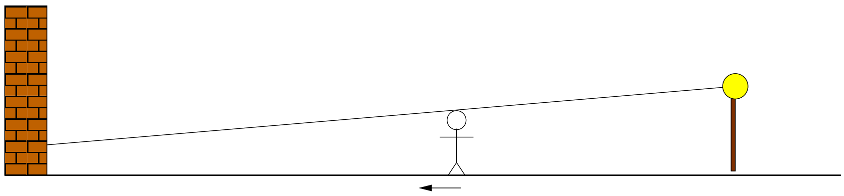
12. Uma calha horizontal possui 100cm de comprimento e tem como seção transversal um triângulo isósceles de 8cm de base e 10cm de altura conforme mostra a figura abaixo.



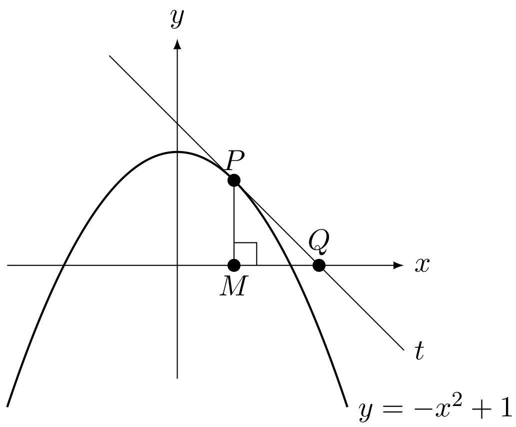
Devido à chuva, a água em seu interior está se elevando. Quão rápido o volume de água em seu interior estará aumentando no instante em que o nível da água for de 5cm e estiver aumentando a uma razão de $1/2$ cm/min?

13. Uma mulher de 1,80m de altura caminha em direção a um muro a uma razão de 4m/s. Diretamente atrás dela e a 40m do muro está um refletor 3m acima do nível do solo.

Quão rápido o comprimento da sombra da mulher estará variando no muro quando ela estiver a meio caminho entre o refletor e o muro? A sombra estará esticando-se ou encurtando-se?



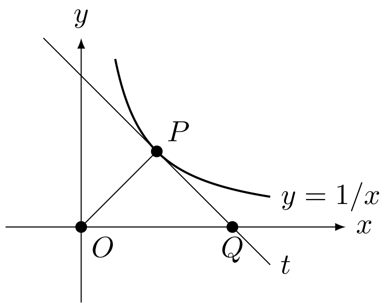
14. Considere a parábola $y = -x^2 + 1$ na figura abaixo, onde a reta t é tangente à parábola no primeiro quadrante em cada ponto $P(x, y)$. Sabendo que a taxa de variação da abscissa de P (coordenada x) é de 2cm/min, determine a taxa de variação do lado MQ do triângulo PMQ, quando o ponto de tangência é $P_0(1/\sqrt{2},\ 1/2)$.



15. Na figura abaixo, $P(x_0, y_0)$ é o ponto de tangência da reta t com a curva $y = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$. Sabendo que o ponto P se desloca sobre a curva mostre que:

(a) O triângulo OPQ é sempre isósceles;

(b) A taxa de variação da área do triângulo OPQ independe da velocidade com que o ponto P se desloca.



4.5 Derivação Implícita

1. Mostre que as retas tangentes às curvas $x^2 + 2xy + y^3 = 1$ e $y^2 + 9x - (x-2)^3 - 9 = 0$ no ponto $(0, 1)$ são perpendiculares.

2. Determine os valores das constantes a e b para que o gráfico da função $h(x) = a + b\,\mathrm{sen}^2(x/2)$ e a curva definida implicitamente por $y\cos x + xy = 5\pi x$ tenham a mesma reta tangente no ponto $(\pi/2,\ 5\pi)$.

3. Uma função $y = y(x)$ é definida implicitamente por $y^4 - y^2 + 4\,\mathrm{sen}(xy) = 0$ e pela condição $y(0) = 1$. Calcule $y'(0)$.

4. Encontre uma equação da reta tangente ao gráfico da curva $2x^2y^2 + y^3\cos(\pi x) - 1 = 0$ no ponto $(1, 1)$.

5. Seja $y = f(x)$ uma função definida pela equação

$$x^2 \cos y + x^2\,\mathrm{sen}\, y - 2x + 1 = 0.$$

(a) Encontre uma equação da reta tangente ao gráfico da curva no ponto $(1, \pi/2)$.
(b) Existem pontos desta curva onde a reta tangente é vertical? Justifique.

Capítulo 5

Integral

5.1 Técnicas Básicas de Integração

1. Resolva as seguintes integrais pelo método da Substituição:

(a) $\int \cos(x+3)\,dx$; (b) $\int \sec(5x)\tan(5x)\,dx$; (c) $\int \operatorname{sen} x\cos x\,dx$;

(d) $\int \operatorname{sen}\theta\cos^3\theta\,d\theta$; (e) $\int \cos^3 x\,dx$; (f) $\int 3x\sqrt{1-2x^2}\,dx$;

2. Resolva as seguintes integrais pelo método da Substituição:

(a) $\int \dfrac{x+3}{(x^2+6x)^{1/3}}\,dx$; (b) $\int x(1+x)^{2/3}\,dx$; (c) $\int \dfrac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$;

(d) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{25-16x^2}}$; (e) $\int \dfrac{dx}{4x^2+9}$; (f) $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{4x^2-9}}$; (g) $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,dx$;

(h) $\int \dfrac{x}{x^4+3}\,dx$; (i) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{28-12x-x^2}}$; (j) $\int \dfrac{dx}{x^2-4x+8}$;

3. Resolva as seguintes integrais pelo método da Integração por partes:

(a) $\int x\operatorname{sen}(5x)\,dx$; (b) $\int xe^{-2x}\,dx$; (c) $\int \log(1-x)\,dx$; (d) $\int \dfrac{e^{1/x}}{x^3}\,dx$;

(e) $\int e^{2x}\operatorname{sen} x\,dx$; (f) $\int \sqrt{x}\log x\,dx$; (g) $\int \operatorname{arcsen}(x/2)\,dx$.

4. Resolva as seguintes integrais:

(a) $\int xe^{x^2}\,dx$; (b) $\int e^{\operatorname{sen} x}\cos x\,dx$; (c) $\int \dfrac{\log x}{x}\,dx$;

(d) $\int \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx$; (e) $\int \dfrac{\cos(\log x)}{x}\,dx$; (f) $\int \dfrac{t^2}{4+t^3}\,dt$;

5. Resolva as seguintes integrais:

(a) $\int \dfrac{e^x}{3+4e^x}\,dx$; (b) $\int \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$; (c) $\int \dfrac{x}{x^2+4}\,dx$;

(d) $\int \dfrac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1}\,dx$; (e) $\int e^{e^x}e^x\,dx$; (f) $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{\log x}}$;

6. Calcule:

(a) $\int_0^3 |x^2-1|\,dx$; (b) $\int_0^1 \dfrac{2x}{1+3x^2}\,dx$.

5.2 Teoremas Fundamentais do Cálculo

1. Seja $g(x) = 2 + \int_0^x (e^z + z)^{1/z}\,dz$. Calcule $\lim_{x\to+\infty} g'(x)$.

2. Considere $f(x) = 4 + \int_0^x \frac{t + e^{t^2}}{3 + t^4}\,dt$. Sem calcular a integral, determine $p(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $p(0) = f(0)$, $p'(0) = f'(0)$ e $p''(0) = f''(0)$.

3. Determine uma função $y = f(x)$ tal que $f(\pi) = 5$ e $\int_0^x t^3 f'(t)\,dt = x^4 \operatorname{sen} x$.

4. Se $f(x) = \int_0^x \frac{e^{u^2} + \cos u}{u^5 + 3}\,du$, determine $(f^{-1})'(0)$.

5.3 Integrais Impróprias

1. Determine se a integral imprópria é convergente (possui um valor finito) ou divergente. Caso seja convergente, determine seu valor.

(a) $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$; (b) $\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^2}\,dx$; (c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$;

(d) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$; (e) $\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx$.

5.4 Integração por Frações Parciais

1. Resolva as seguintes integrais usando o método das frações parciais:

(a) $\int \frac{x}{x^2+4x-5}\,dx$; (b) $\int \frac{x+1}{x^2+4x-5}\,dx$; (c) $\int \frac{x^2}{x^2+2x+1}\,dx$;

(d) $\int \frac{x}{x^2-2x-3}\,dx$; (e) $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$; (f) $\int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx$.

2. Resolva as seguintes integrais usando o método das frações parciais:

(a) $\int \frac{2x-7}{x^2+6x-7}\,dx$; (b) $\int \frac{x+2}{x^2+x}\,dx$; (c) $\int \frac{dx}{x^4-1}$; (d) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$;

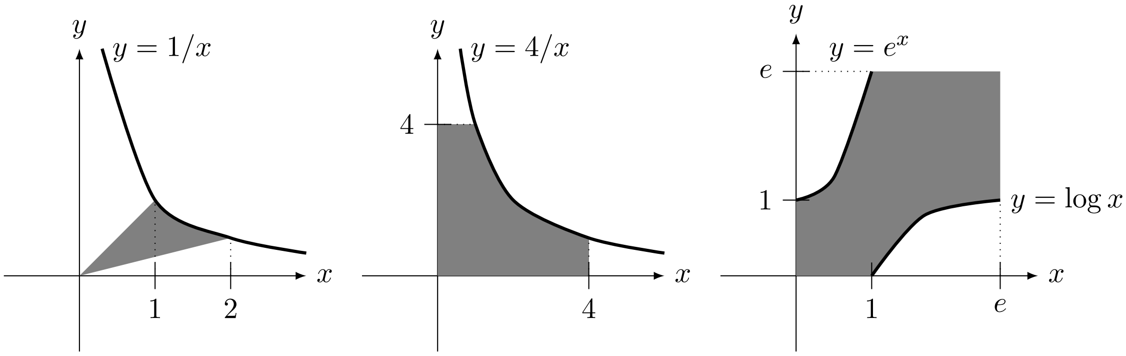
(e) $\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}\,dx$; (f) $\int \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta+\cos\theta-2}\,d\theta$; (g) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$.

Capítulo 6

Aplicações da Integral

6.1 Área no Plano

1. Calcule a área de cada uma das regiões indicadas nas figuras abaixo:



(a) (b) (c)

2. Calcule a área da região limitada pelas curvas:
(a) $y = x^3$, $y = x + 6$ e $2y + x = 0$; (b) $2y^2 = x + 4$ e $x = y^2$;
(c) $y = 1/x$, $y = \sqrt{x}$ e $y = 2$; (d) $y = 1 + \operatorname{sen} x$ e $y = \cos(2x)$ para $x \in [0, \pi]$.

3. Determine a área da região (infinita) delimitada pelos gráficos de:
(a) $y = xe^{-x}$ e a reta $y = 0$; (b) $y = x^2e^{-x}$ e a reta $y = 0$.

4. Determine a área à direita de $x = 3$ e entre a curva $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ e o eixo x.

6.2 Volume de Sólidos

1. Considere uma função contínua em $[a, b]$, $L \in \mathbb{R}$ uma constante, e Ω a região limitada pela curva $y = f(x)$ e pelas retas $x = a$, $x = b$ e $y = L$, onde $0 < L < f(x)$. Expresse o volume do sólido obtido girando a região Ω em torno da reta $y = L$.

2. Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo y, da região limitada pela curva $y = e^x$ e pelas retas $x = 0$, $x = 1$ e $y = 0$.

3. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno da reta $y = -1$, da região limitada pelas curvas $f(x) = 2 + \cos x$ e $g(x) = 2 - \cos x$, para $x \in [-\pi/2, \pi/2]$.

4. Considere o sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, da região limitada pela parábola $x^2 = 4ay$ e a reta $y = a$, com $a > 0$. Determine o valor de a se o volume deste sólido é 50π.

5. Para cada $n > 0$, seja Ω_n a região limitada pelo gráfico de $y = x^n$, o eixo x e a reta $x = 1$. Se W_n é o volume do sólido obtido girando Ω_n em torno do eixo x, e V_n é o volume do sólido obtido girando-se Ω_n em torno do eixo y, determine $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{V_n}{W_n}$.

6. Seja R a região infinita delimitada pelas curvas $y = e^{-x}$ e $y = \dfrac{1}{x}$, $x \geq 1$. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação de R em torno do eixo x.

7. Encontre o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo x, da região infinita situada entre o gráfico de $y = xe^{-x}$ e sua assíntota horizontal.

6.3 Comprimento de Curvas no Plano

1. Suponha que dois ciclistas estão correndo com a mesma velocidade escalar, ambos partindo, ao mesmo tempo, do ponto $A(-\pi/4,\ 0)$. Sabemos que o ciclista 1 percorre o arco de circunferência $y = f(x) = \sqrt{(\pi/4)^2 - x^2}$ e o ciclista 2 percorre o arco da curva $y = g(x) = -\log(\sqrt{2}\cos x)$ para $x \in [-\pi/4, \pi/4]$.

Qual deles chegará primeiro ao ponto $B(\pi/4,\ 0)$?

Apêndice A

Respostas dos Exercícios

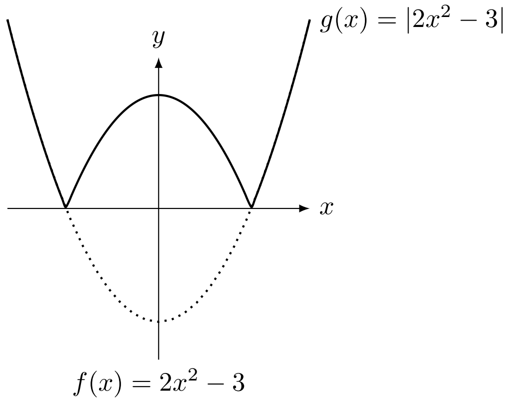
A.0 Pré-Cálculo

A.0.1 Pré-Cálculo

1. (a) $y = -4x + 5$. (b) $7y + 3x - 2 = 0$.
(c) $y = -4$. (d) $x = 1$. (e) $3y = -x - 2$.
(f) $2y = -x + 11$. (g) $3y - 2x - 17 = 0$.

2. (a) $(0, 1)$. (b) as retas são coincidentes.

3. (a) 47. (b) -3. (c) $2a^2 - 3$. (d) $-\frac{5}{2}$. (e) 3.
(f) -1 e 1.
(g) O gráfico de g é obtido refletindo o gráfico de f (mostrado pontilhado) em torno do eixo x.



4. (a) $\mathbb{R} \setminus \{\sqrt{3}\}$. (b) $(1, +\infty)$. (c) $[3, +\infty)$.
(d) $(-\infty, -4) \cup [-1, 1]$. (e) $[2, +\infty)$. (f) $[0, 3]$.

5. (a) $f(x) < 0$ se $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $f(x) > 0$ se $x \leq -\sqrt{2}$ ou $x \geq \sqrt{2}$.
(b) $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
(c) $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
(d) $f(x) > 0$ para $x \in (-2, 1) \cup (2, +\infty)$ e $f(x) < 0$ para $x \in (-\infty, 2] \cup (1, 2]$.
(e) $f(x) < 0$ para $x \in (-\infty, 0)$ e $f(x) > 0$ para $x \in [0, +\infty)$.
(f) $f(x) < 0$ para $x \in (2, 3]$ e $f(x) > 0$ para $x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$.

6. (a) $2x^2+3x+\sqrt{3x^2+4}$. (b) $(2x^2+3x)\sqrt{3x^2+4}$.
(c) 61. (d) $6x^2 + 8 + 3\sqrt{3x^2 + 4}$. (e) $\dfrac{1}{2}$.
(f) $2(\operatorname{sen} x)^2 + 3 \operatorname{sen} x$. (g) 9.

7. $V(r) = \dfrac{Ar}{2} - \pi r^3$.

8. $A(x) = 9 - 3x$.

A.1 Limite

A.1.1 Limites

1. (a) Precisamos da identidade $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Assim, tomando $a = \sqrt{x^2+1}$ e $b = x$, multiplicamos em cima e embaixo por $\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}$ para obter que

$$\sqrt{x^2+1} - x = \frac{(\sqrt{x^2+1})^2 - x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}.$$

Assim,

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0.$$

(b) Precisamos da identidade (pouco conhecida): $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$. Assim, tomando $a = \sqrt[3]{x^3+1}$ e $b = x$, multiplicamos em cima e embaixo por $a^2 + ab + b^2 = \sqrt[3]{(x^3+1)^2} + x\sqrt[3]{x^3+1} + x^2$:

$$\sqrt[3]{x^3+1} - x = \frac{(\sqrt[3]{x^3+1})^3 - x^3}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2} + x\sqrt[3]{x^3+1} + x^2} = \frac{(x^3+1) - x^3}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2} + x\sqrt[3]{x^3+1} + x^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2} + x\sqrt[3]{x^3+1} + x^2}.$$

Passando ao limite com $x \to +\infty$ obtemos 0.

(c) Divida o numerador e o denominador por $\sqrt{x}$:

$$\frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \sqrt{x + 1/x} - 1.$$

Quando $x \to +\infty$, $\sqrt{x+1/x} - 1 \to +\infty$.

2. Colocando o mesmo denominador obtemos

$$\frac{(2-a)x^2 + (b-a)x + 3}{x+1}.$$

Como o limite é finito, $2 - a = 0$, pois caso contrário o limite seria infinito (se $2-a > 0$ seria $+\infty$, se $2-a <$

0 seria $-\infty$). Assim, como $2-a=0$, devemos fazer com que $\lim_{x\to+\infty}\frac{(b-a)x+3}{x+1}=0$. Como o limite é $b-a$, concluímos que $b-a=0$. Assim, $a=b=2$.

A.2 Continuidade

A.2.1 Continuidade

1. $c=1$

2. $a=b=8$.

3. $g(1)=-\frac{1}{18}$.

4. $a=2$ e $b=3$.

5. $c=4$.

6. $c=-\frac{4}{5}$.

7. $c=\frac{1}{2}$.

A.3 Derivada

A.3.1 Derivada Básicos

1. Deve-se igualar $f(1)=g(1)$ e $f'(1)=g'(1)$. Vamos obter um sistema com duas equações e duas incógnitas. R: $a=-\frac{8}{3}$, $b=\frac{11}{3}$ e $c=1$.

2. Além de termos que $f(1^-)=f(1^+)$ (limites laterais são iguais) precisamos que $f'(1^-)=f'(1^+)$. R: $a=-1$ e $b=2$.

3. Veja solução do exercício anterior. R: $a=-\frac{7}{6}$ e $b=\frac{11}{8}$

4. Veja solução do exercício anterior. R: $a=-\frac{1}{\pi}$ e $b=\frac{\pi}{4}$.

5. (a) $f'(x)=3x^2\operatorname{sen}^2(5x)+10x^3\operatorname{sen}(5x)\cos(5x)$.
(b) $f'(x)=3\tan^2(\operatorname{sen}x)\sec^2(\operatorname{sen}x)\cos x$.
(c) $f'(x)=2\sec(2x)\tan(2x)e^{\sec(2x)}$.
(d) $f'(x)=\frac{1}{x\log x}$.
(e) $f'(x)=6e^{-x}\cos(e^{-x})\operatorname{sen}(e^{-x})$.

6. Como f é diferenciável em 1, f é contínua em 1. Assim $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$ Fazendo $x\to 1$, pelo Teorema do Sanduíche, $\lim_{x\to 1}f(x)=2=f(1)$. Note que $\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$. Assim, $x+1\le f(x)\le\frac{x^2+3}{2}$. Agora queremos estimar $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$. Assim subtraímos 2 de todos os termos da desigualdade:

$$x-1\le f(x)-2\le\frac{x^2+3}{2}-2=\frac{x^2-1}{2}.$$

Dividindo por $x-1$ todos os termos (supondo $x-1>0$, o caso $x-1<0$ é análogo):

$$1\le\frac{f(x)-2}{x-1}\le\frac{x+1}{2}.$$

Fazendo $x\to 1$, pelo Teorema do Sanduíche, obtemos que $f'(1)=1$.
R: $f(1)=2$ e $f'(1)=1$.

7. Primeiro escrevermos que $x=e^{\log x}$. Assim,

$$x^{\operatorname{arcsen}x}=e^{\log x\operatorname{arcsen}x}.$$

Derivando obtemos a resposta:

$$x^{\operatorname{arcsen}x}\left(\frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\operatorname{arcsen}x}{x}\right).$$

8. (a) sim pois como f é diferenciável, f é contínua. Como $|x|$ é uma função contínua, o produto de funções contínuas é contínua.

(b) Note que $g(0)=0$. Assim, $g'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{g(h)}{h}$. Agora, $\frac{g(h)}{h}=\frac{|h|}{h}f(h)$. Agora se $h\to 0^+$, o limite será $f(0)$ pois $\frac{|h|}{h}=1$ para $h>0$. Por outro lado, se $h\to 0^-$, o limite será $-f(0)$ pois $\frac{|h|}{h}=-1$ para $h<0$. Assim, para que o limite exista, e portanto $g'(0)$ exista, precisamos que $f(0)=-f(0)$, o que implica que $f(0)=0$.

9. Deverá iguala o valor das funções e de suas derivadas em $x=0$. Serão duas equações e duas incógnitas. R: $a=\frac{3}{2}$ e $b=4$.

10. Pela definição de derivada, definido $f(x)=\sqrt[3]{\tan^2 x}$, o limite é igual a $f'(a)$. Pela regra da cadeia obtemos a resposta: $\frac{2}{3}\frac{(\tan a)^{-1/3}}{\cos^2 a}$.

A.3.2 Teorema do Valor Médio

1. Pela regra do quociente, $g'(x)=\frac{f'(x)x-f(x)}{x^2}$. Portanto o sinal de g' é igual ao sinal de $h(x)=f'(x)x-f(x)$. Note que $h'(x)=f''(x)x$. Como f' é crescente, $f''>0$. Logo, para $x>0$, $h'(x)>0$. Logo h é crescente. Como $h(0)=f'(0)0-f(0)=0$, $h(x)>0$ para $x>0$. Logo $g'(x)=h(x)>0$ para $x>0$. Portanto g é crescente para $x>0$.

A.3.3 Derivada da Inversa

1. (a) Como $f'(x)=5x^4+3x^2+3>0$ para todo $x\in\mathbb{R}$, a função é sempre crescente. Logo a inversa existe em $\mathbb{R}$.

(b) Como $f(1)=5$, $f^{-1}(5)=1$. Além disso, por (a) $f'(1)=11$. Pelo teorema da função inversa, $(f^{-1})'(5)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{11}$.

2. Como a derivada é positiva para todo $x > 0$ a função é crescente e portanto injetiva. Assim, pelo Teorema da Função Inversa, possui inversa. Alem disso $(x^5+7)^{1/3} = 2$ se $x^5 = 1$, ou seja, $x = 1$. Calculando $f'(1)$ vamos obter que $(f^{-1})'(2) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{12}{5}$. A reta tangente é $y - 1 = \dfrac{12}{5}(x-2)$.

3. (a) Como a derivada é positiva (calcule!) para todo $x > 1$ a função é crescente e portanto injetiva. Assim, pelo Teorema da Função Inversa, possui inversa. Como queremos $f^{-1}(0)$, precisamos determinar $x > 1$ tal que $f(x) = 0$. Tomando tangente dos dois lados vamos obter a equação $\dfrac{x^3}{3} - x = 0$. A solução maior que 1 é $\sqrt{3}$. Assim $(f^{-1})'(0)\dfrac{1}{f'(\sqrt{3})} = 1/2$.

(b) $y = \dfrac{1}{2}x + \sqrt{3}$.

4. Como a derivada é positiva (calcule!) para todo $x > 1$ a função é crescente e portanto injetiva. Assim, pelo Teorema da Função Inversa, possui inversa. Se $f(x) = \pi/4$, obtemos tomando tangente dos dois lados que $x^2 - 1 = 1$. Logo $x = \sqrt{2}$ pois queremos $x > 0$. Assim, $(f^{-1})'(\pi/4) = \dfrac{1}{f'(\sqrt{2})} = \sqrt{2}/2$.

5. Como a derivada é positiva (calcule!) para todo x a função é crescente e portanto injetiva. Assim, pelo Teorema da Função Inversa, possui inversa. Como $f(1) = e^3$, $(f^{-1})'(e^3) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{9e^3}$.

6. (a) Como a derivada é positiva (calcule!) para todo x a função é crescente e portanto injetiva. Assim, pelo Teorema da Função Inversa, possui inversa. $(f^{-1})'(\pi/2) = -1$.

(b) $y = -x + \dfrac{\pi+2}{2}$.

A.4 Aplicações da Derivada

A.4.1 Máximo e Mínimo Local

1. $f'(2) = 0$ pois o ponto $x = 2$ é de máximo local.

2. Como f e g atingem máximo local, $f'(a) = g'(a) = 0$. Como $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, $h'(a) = 0$ pois $f'(a) = g'(a) = 0$. Mas derivada nula NÃO implica que $x = a$ é máximo local. Assim temos que analisar o sinal antes e depois de $x = a$. Vamos analisar antes. Como $x = a$ é máximo local de f e g, $f'(x)$ e $g'(x)$ é positiva para $x < a$ numa vizinhança de a. Como $f(a)$ e $g(a)$ são positivas, próximas de $x = a$ também serão positivas pois são contínuas. Assim o sinal de $h'(x)$ também será positivo para $x < a$ numa vizinhança de a.

Fazendo análise análoga concluímos que $h'(x)$ é negativa para $x > a$ e próximo de a. Assim $x = a$ é ponto de máximo local de h.

A.4.2 L'Hospital

1. (a) $5/3$. (b) $-\infty$. (c) $-\infty$. (d) $-\dfrac{1}{2}$. (e) $\dfrac{2}{\pi^2}$. (f) 1.

2. (a) 0. (b) $\dfrac{2}{\pi}$. (c) $5/3$. (d) $1/2$. (e) 1. (f) 0.

3. (a) $-1/6$. (b) 0. (c) $-1/2$. (d) $1/n$. (e) 2. (f) $\cos a$. (g) $6a^{5/2}$.

4. (a) 1. (b) e. (c) e^{-2}. (d) e. (e) 1. (f) e^a.

5. (a) 5. (b) -1. (c) 2. (d) 0. (e) 0. (f) 0.

6. (a) $+\infty$. (b) π. (c) 0. (d) 1. (e) e^2. (f) 1.

A.4.3 Gráficos

1. (a) É crescente onde $f' > 0$. Observando o gráfico dado no enunciado concluímos que f é crescente em $(-\infty, -5)$, $(-4, +\infty)$. Decresce em $(-5, -4)$.

(b) Pontos onde $f' = 0$. Observando o gráfico dado: $x = -4$ e $x = -3/2$.

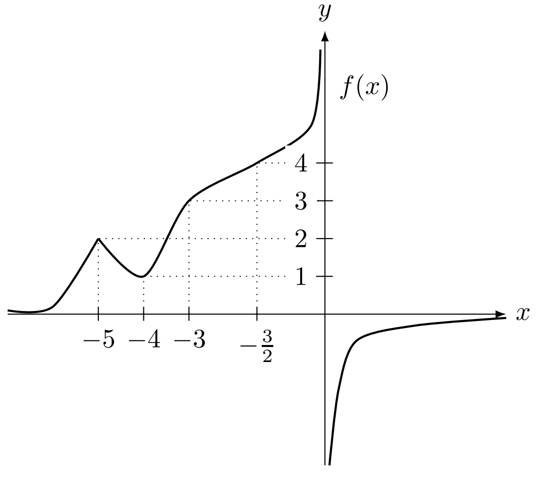
(c) Somente $x = -4$, onde a derivada se anula mas é negativa antes e positiva depois, sendo portanto ponto de mínimo local. O ponto $x = -3/2$ NÃO é de máximo nem mínimo local pois a derivada é positiva antes e depois.

(d) A concavidade é para cima onde $f'' > 0$. Isto corresponde aos pontos onde f' cresce. Observando o gráfico dado concluímos que $f'' > 0$ (ou f' cresce, o que é a mesma coisa) em $(-\infty, -3)$ e $(-3/2, 0)$. De forma similar concluímos que a concavidade é para baixo ($f'' < 0$) em $(-3, -3/2)$ e $(0, +\infty)$.

(e) São pontos onde o sinal de f'' muda, e portanto onde a concavidade muda de direção. Isto ocorre em $x = -3$ e $x = -3/2$.

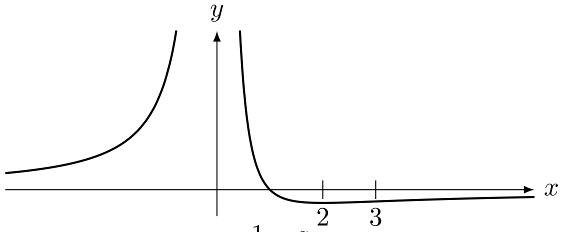
(f) Assíntota horizontal é $y = 0$ pois $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ é $y = 0$. Assintota vertical em $x = 0$ onde a derivada vai para ∞.

(g) Juntando todas as informações anteriores obtemos o esboço abaixo.



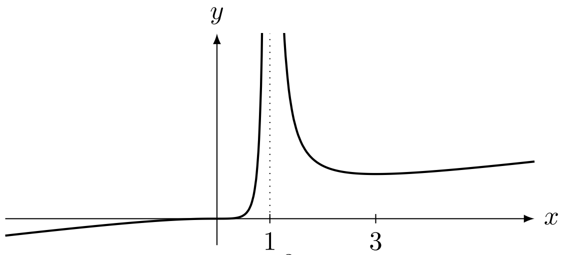
2. (a) $f'(x) = \dfrac{x-2}{x^3}$ e $f''(x) = \dfrac{6-2x}{x^4}$. Assim a derivada se anula em $x = 2$. A função cresce até

$x = 0$, decresce em $(0, 2)$ e cresce em $(2, +\infty)$. A concavidade é para cima até $x = 3$ e para baixo depois. Existe assíntota vertical em $x = 0$ e como o limite no $\pm\infty$ é zero, a assíntota horizontal $y = 0$.



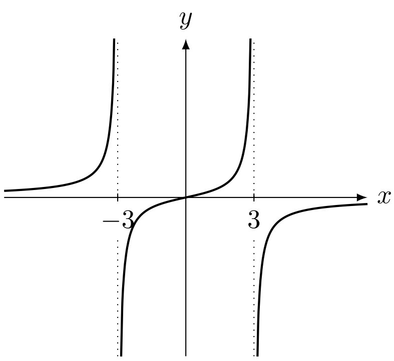
(a) $f(x) = \dfrac{1-x}{x^2}$

(b) $f'(x) = \dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$ e $f''(x) = \dfrac{6x}{(x-1)^4}$. Assim a derivada se anula em $x = 3$ e $x = 0$. A função cresce até $x = 1$, decresce em $(1, 3)$ e cresce em $(3, +\infty)$. A concavidade é para baixo até $x = 0$ e para cima depois. Existe assíntota vertical em $x = 1$ e como o limite no $\pm\infty$ é $\pm\infty$, NÃO possui a assíntota horizontal.



(b) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

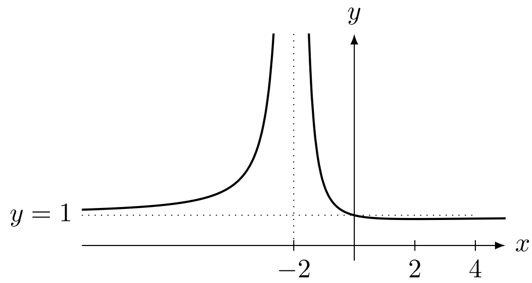
(c) $f'(x) = \dfrac{2(x^2+9)}{(9-x^2)^2}$ e $f''(x) = \dfrac{4x(x^2+27)}{(9-x^2)^3}$. Assim a derivada é sempre positiva, e portanto a função é sempre crescente. O sinal de f'' depende do sinal de $4x$ e de $9 - x^2$. Assim, a concavidade é para cima até $x = -3$ e em $(0, 3)$, para baixo em $(-3, 0)$ e depois de $x = 3$. Existe assíntota vertical em $x = \pm 3$ e como o limite no $\pm\infty$ é zero, a assíntota horizontal é $y = 0$.



(c) $f(x) = \dfrac{2x}{9-x^2}$

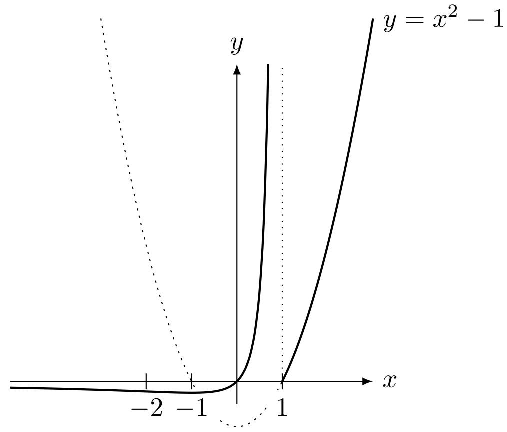
(d) $f'(x) = \dfrac{x-2}{(x+2)^3}$ e $f''(x) = \dfrac{2(4-x)}{(x+2)^4}$. Assim a função cresce até $x = -2$, decresce em $(-2, 2)$, e cresce de $x = 2$ em diante. A concavidade é para cima até $x = 4$ e para baixo depois (embora impossível de ser visto na figura abaixo!).

Existe assíntota vertical em $x = -2$ e como o limite no $\pm\infty$ é 1, a assíntota horizontal é $y = 1$.



(d) $f(x) = 1 - \dfrac{x}{(x+2)^2}$

(e) Vamos calcular a derivada de $h(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$. $h'(x) = -\dfrac{x+1}{(x-1)^3}$ e $f''(x) = \dfrac{2(x+2)}{(x-1)^4}$. Assim a derivada se anula em $x = -1$. A função decresce até $x = -1$ e cresce em $(-1, 1)$. A concavidade é para baixo até $x = -2$ e para cima em $(-2, 1)$. Depois de $x = 1$ não interessa pois o gráfico passa a ser a parábola $y = x^2 - 1$. Existe assíntota vertical em $x = 1$ e como o limite no $-\infty$ é zero, possui a assíntota horizontal $y = 0$.



(e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{(x-1)^2}, & x < 1, \\ x^2 - 1, & x \geq 1. \end{cases}$

3. (a) É crescente onde $f' > 0$. Observando o gráfico dado no enunciado concluímos que f é crescente em $(-1/2, +\infty)$. Decresce em $(-\infty, -1/2)$.

(b) Pontos onde $f' = 0$. Observando o gráfico dado: $x = -1/2$.

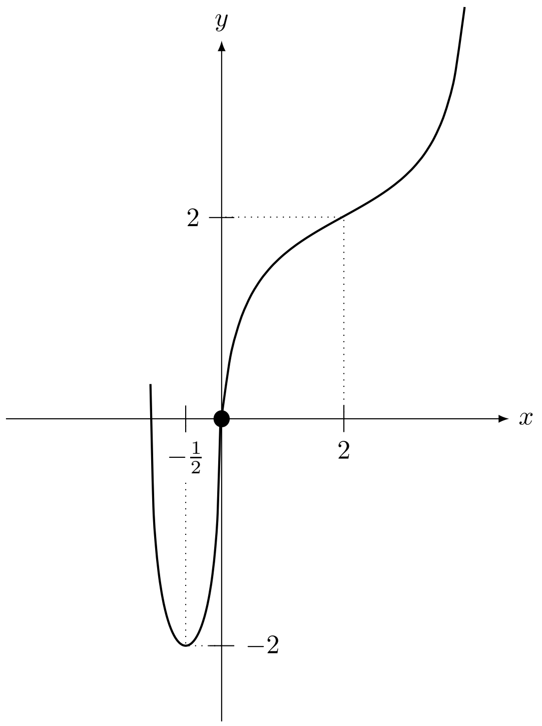
(c) Somente $x = -1/2$, onde a derivada se anula mas é negativa antes e positiva depois, sendo portanto ponto de mínimo local.

(d) A concavidade é para cima onde $f'' > 0$. Isto corresponde aos pontos onde f' cresce. Observando o gráfico dado concluímos que $f'' > 0$ (ou f' cresce, o que é a mesma coisa) em $(-\infty, 0)$ e $(2, +\infty)$. De forma similar concluímos que a concavidade é para baixo ($f'' < 0$) em $(0, 2)$.

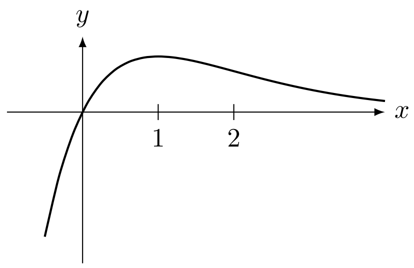
(e) São pontos onde o sinal de f'' muda, e portanto onde a concavidade muda de direção. Isto ocorre em $x = 0$ e $x = 2$.

(f) Juntando todas as informações anteriores obtemos o esboço abaixo.

$y = f(x)$



4. (a) Calculando $f'(x) = (1-x)e^{-x}$ e $f''(x) = (x-2)e^{-x}$. Como e^{-x} é sempre positivo, o sinal de f' é igual ao sinal de $(1-x)$ e o sinal de f'' igual ao sinal de $x-2$. Assim a função cresce até $x = 1$ e decresce depois. O $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. A concavidade é para baixo até $x = 2$ e para cima depois. Além disso $f(0) = 0$. Combinando tudo isto obtemos o gráfico abaixo.

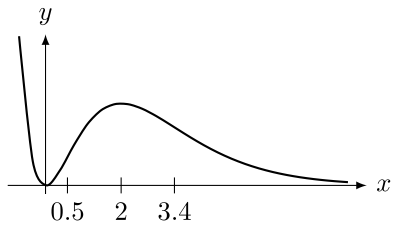


(a) $f(x) = xe^{-x}$

(b) Calculando $g'(x) = (2-x)xe^{-x}$ e $g''(x) = (x^2-4x+2)e^{-x}$. Como e^{-x} é sempre positivo, o sinal de g' é igual ao sinal de $(2-x)x$ e o sinal de g'' igual ao sinal de x^2-4x+2.

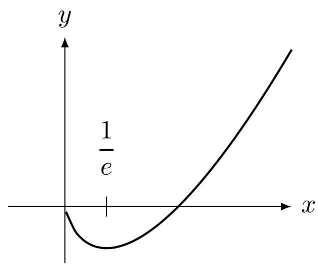
Como os zeros de g' são em $x = 0$ e $x = 1$ e seu sinal é igual ao de $(2-x)x$: g decresce até $x = 0$, cresce em $(0,2)$ e decresce depois.

Como os zeros de g'' são em $2 \pm \sqrt{2}$ (zeros de x^2-4x+2), a concavidade é para cima até $2-\sqrt{2} \approx 0.58$ e depois de $2+\sqrt{2} \approx 3.41$. A concavidade é para baixo (aproximadamente) em $(0.58, 3.41)$. O $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$. Além disso $g(0) = 0$. Combinando tudo isto obtemos o gráfico abaixo.



(b) $g(x) = x^2e^{-x}$

(c) Note que o domínio é $x > 0$ pois $\log$ não está definido para $x < 0$. Por L'Hospital (verifique), $\lim\limits_{x\to0^+} h(x) = 0$. Calculando $h'(x) = 1 + \log x$ e $f''(x) = 1/x$. Como $h'(c) = 0 = 1 + \log c$, $\log c = -1$. Tomando exponencial dos dois lados, $c = e^{-1}$ é o ponto onde a derivada zero. Portanto se $0 < x < 1/e$ a função decresce e se $x > 1/e$ a função cresce. Como $f''(x) > 0$ para todo $x > 0$, a função possui concavidade para cima. O $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Combinando tudo isto obtemos o gráfico abaixo.



(c) $h(x) = x\log x$

A.4.4 Taxas Relacionadas

1. Chamado de $x(t)$ a distância da base da escada até a parede e de $y(t)$ a distância da parte superior da escada até a base da parede, obtemos por Pitágoras que $x^2(t) + y^2(t) = 5^2$. Assim, derivando em relação a t e simplificando, $x(t)x'(t) + y(t)y'(t) = 0$. Como num certo instante $x(t) = 3$ e $x'(t) = 3$ (note que o sinal é positivo pois está se AFASTANDO da parede), e por Pitágoras, $y(t) = 4$ obtemos que $3 \cdot 3 + 4y'(t) = 0$. Logo, $y'(t) = -\dfrac{9}{4}$m/s.

2. Note que o triângulo PQR é retângulo. Chamando de x o lado QR e de y o lado PQ, temos por Pitágoras que $x^2 + y^2 = 15^2$. Quando $QR = x = 12$, $y = 9$. Derivando (e simplificando) obtemos que $xx' + yy' = 0$. No instante em que $x' = 1$, $x = 12$ e $y = 9$, obtemos que $y' = -4/3$. Como a área do triângulo é $A = xy/2$, a sua variação $A' = \dfrac{1}{2}(x'y + xy')$. Logo neste mesmo instante, $A' = \dfrac{-7}{2}cm^2/s$.

Outra forma (mais complicada) sem utilizar taxas relacionadas: substituindo $y = \sqrt{15^2 - x^2}$ na fórmula da área $A = \dfrac{xy}{2} = \dfrac{x}{2}\sqrt{15^2 - x^2}$. Assim,

$$A' = \frac{1}{2}(x'\sqrt{15^2 - x^2} + x\frac{-2xx'}{2\sqrt{15^2 - x^2}}).$$

Resubstituindo y obtemos que:

$$A' = \frac{1}{2}(x'y - x^2\frac{x'}{y}) = \frac{1}{2}(1(9) - 12^2\frac{1}{9}) = -7/2.$$

3. Vamos chamar de x o outro lado do retângulo. Por semelhança de triângulos, $\dfrac{40 - x}{40} = \dfrac{y}{60}$. Quando $y = 36$, resolvendo a equação obtemos que $x = 16$. Como, $\dfrac{-x'}{40} = \dfrac{y'}{60}$, quando $y' = 0,5$, $x' = -1/3$.

Assim a área do retângulo $A(t) = x(t)y(t)$ varia em função do tempo por $A' = x'y + xy'$. Logo no instante t quando $y' = 0,5, x' = -1/3, y = 36, x = 16$, temos que $A'(t) = -4cm/s$. Logo a área está diminuindo neste instante.

4. Seja x a distância entre a caixa e o ponto P. Claro que $\tan\theta(t) = \dfrac{1}{x(t)}$. Derivando obtemos que

$$\frac{\theta'}{\cos^2\theta} = -\frac{x'}{x^2}.$$

Quando $x(t) = 1$, $\theta = \dfrac{\pi}{4}$. Como $x' = -2$ (o sinal é negativo pois a caixa está sendo puxada, diminuindo o valor de x), substituindo na relação acima, obtemos $\dfrac{\theta'}{\cos^2(\pi/4)} = -\dfrac{-2}{1^2}$. Logo, $2\theta' = 2$, ou, $\theta' = 1m/min$.

5. Sejam $R(t)$ o raio da esfera, $r(t)$ o raio e $h(t)$ a altura do cone inscrito na esfera. Ligando-se o centro da esfera até um dos pontos do círculo da base do cone observamos o triângulo retângulo com hipotenusa R e catetos r e $h - R$. Logo, por Pitágoras,

$$(h(t) - R(t))^2 + r(t)^2 = R(t)^2.$$

Agora são dados que $R(t) = 1$, $h(t) = 4/3$. Por esta relação obtemos que $r(t) = 2\sqrt{2}/3$ (ou $r^2(t) = 8/9$). Derivando e dividindo por 2 obtemos que

$$(h - R)(h' - R') + rr' = RR'.$$

Como $R' = 0,9$, $h' = 0,8$, $R = 1$, $h = 4/3$ e $r = 2\sqrt{2}/3$, resolvendo para r' obtemos que $r' = \frac{7}{5\sqrt{2}}$ ou $rr' = \dfrac{14}{15}$.

O volume do cone é $V(t) = \dfrac{\pi}{3}r(t)^2h(t)$. Assim a variação do volume do cone $V(t)$ é dado por

$$V'(t) = \frac{\pi}{3}(2r'(t)r(t)h(t) + r^2(t)h'(t)).$$

Substituindo os valores acima ($r(t)r'(t) = \dfrac{14}{15}$ e $r^2(t) = 8/9$) obtemos que $V'(t) = \dfrac{16\pi}{15}$m^3/min

6. Sejam x e y as posições dos carros cuja origem está na interseção. Pela orientação dos eixos $x' = -20$ e $y' = -15$ (velocidades negativas pois ambos aproximam-se da interseção). Se d é a distância entre eles, por Pitágoras,

$$x^2(t) + y^2(t) = d^2(t).$$

Derivando e simplificando obtemos que $xx' + yy' = dd'$. Quando $x = 400$ e $y = 300$, $d = 500$. Assim, $400(-20) + 300(-15) = 500d'$. Logo, $d' = -25m/s$ (estão se aproximando a 25m/s).

7. Seja $x(t)$ a posição do carro e $z(t)$ a altura do balão. Agora por Pitágoras a distância entre eles $d(t)$ satisfaz $d^2(t) = x^2(t) + z^2(t)$. Pelos dados, $x(0) = 0$ e $z(0) = 48$. Além disso, $x(4) = 4(20) = 80$ e $z(4) = 48 + 3(4) = 60$. Neste instante $t = 4$ a distância entre eles por Pitágoras é $d(4) = 100$.

Derivando (e dividindo por 2) obtemos que $dd' = xx' + zz'$. No instante $t = 4$, como $d = 100, x = 80, x' = 20, z = 60, z' = 3$, obtemos que $100d'(4) = 80(20) + 60(3)$. Logo $d'(4) = 17,8m/s$.

8. Seja $x(t)$ a posição do carro e $y(t)$ a posição do trem com a a origem na interseção da rodovia e os trilhos do trem. Agora por Pitágoras a distância $d(t)$ satisfaz $d^2(t) = x^2(t) + y^2(t) + 10^2$. Pelos dados, $x(0) = y(0 = 0$. Além disso, $x(2) = 2(40) = 80$ e $y(2) = 2(20) = 40$. No instante $t = 2$ a distância entre eles por Pitágoras é $d(2) = 90$.

Derivando (e dividindo por 2) obtemos que $dd' = xx' + yy'$. No instante $t = 2$, como $d = 90, x = 80, x' = 40, y = 40, y' = 20$, obtemos que $90d'(2) = 80(40) + 40(20)$. Logo $d'(2) = \dfrac{400}{9}$ m/s.

Outra forma (mais complicada) sem utilizar taxas relacionadas: Colocando a origem na interseção, na altura do trilho do trem, com o eixo x na direção do movimento do carro e o eixo y na direção do movimento do trem, o carro encontra-se no instante s em $c(s) = (40s,\ 0,\ 10)$ e o trem (o final do último vagão) em $t(s) = (0,\ 20s,\ 0)$. A distância $d(s) = \sqrt{(40s)^2 + (20s)^2 + 10}$. Assim,

$$d'(s) = \frac{2 \cdot 40s \cdot 40 + 2 \cdot 20s \cdot 20}{2\sqrt{(40s)^2 + (20s)^2 + 10}}.$$

Calculando obtemos que $d'(2) = \dfrac{400}{9}$ m/s.

9. Colocando a origem na interseção e colocando $x(t)$ como posição do fusca e $y(t)$ do caminhão. Assim, a distância $d(t)$, por Pitágoras é $d^2(t) = x^2(t) + y^2(t)$. Derivando (e simplificando) obtemos que $dd' = xx' + yy'$. Dois segundos depois $x = 120 - 2 \cdot 30 = 60$ e $y = 2 \cdot 40 = 80$. Assim, $d = 100$. Como $x' = -30$ (sinal negativo pois o fusca está se aproximando da interseção) e $y' = 40$, $100d' = 60(-30) + 80(40)$. Logo $d' = -18 + 32 = 14$ m/s.

Outra forma (mais complicada) sem utilizar taxas relacionadas: Colocando a origem na interseção, com eixo x na direção do fusca e o eixo y na direção do caminhão, o fusca encontra-se no instante s em $f(s) = (-30s + 120,\ 0)$ e o caminhão em $c(s) = (0,\ 40s)$. Note que o sinal negativo na velocidade do fusca é porque ele está se aproximando da interseção. A distância $d(s) = \sqrt{(-30s+120)^2 + (40s)^2}$. Assim,

$$d'(s) = \frac{2(-30s+120)(-30) + 2(40s)(40)}{2\sqrt{(-30s+120)^2 + (40s)^2}}.$$

Calculando obtemos que $d'(2) = 14$ m/s.

10. Chamando de x e y os lados do retângulo, temos que $x(t)y(t) = 50$. Assim, $x'y + xy' = 0$. Como $x' = 2$ e $x = 5$, $y = 10$ (a área é 50!) e como $2 \cdot 10 + 5y' = 0, y' = -4$. Agora o perímetro $P(t) = 2(x(t)+y(t))$. Assim, $P'(t) = 2(x'(t)+y'(t))$. Logo, $P'(t) = 2(2-4) = -4m/s$.

11. Seja $d(t)$ a distância entre a pessoa e a parede em função do tempo. Seja $\theta(t)$ o ângulo de visão do quadro. Logo $\tan(\theta(t)) = \dfrac{1}{d(t)}$. Assim,

$$\frac{\theta'(t)}{\cos^2\theta(t)} = -\frac{d'(t)}{d^2(t)}.$$

Por Pitágoras, a hipotenusa é $\sqrt{5}$ quando os catetos são 1 e 2. Assim, $\cos(\theta) = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$. Substituindo na equação acima (note que $d'(t) = -2$ pois a distância está diminuindo) obtemos que $\theta'(t) = \dfrac{2}{5}$rad/s.

12. Seja h o nível de água e b a base do triângulo contendo água. Por semelhança de triângulos, $\dfrac{h}{10} = \dfrac{b}{8}$. Assim, quando o nível $h = 5$ a base $b = 4$. Suponha que $h' = 1/2$ (velocidade de subida do nível de água). Como $\dfrac{h'(t)}{10} = \dfrac{b'(t)}{8}$, $b'(t) = 2/5$. Como o volume $V(t) = 50h(t)b(t)$ (1/2 base vezes altura do triângulo vezes 100), $V' = 50(hb' + h'b) = 50(5(2/5) + 1/2(4)) = 200cm^3/min$.

13. Seja $x(t)$ a distância da mulher até o muro e $s(t)$ o comprimento da sombra no muro. Considere a reta saindo do refletor, passando pela cabeça da mulher até encontrar o muro. Igualando $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ do intervalo 0 até x e de x até 40 obtemos que

$$\frac{1,80 - s(t)}{x} = \frac{3 - 1,80}{40 - x(t)} = \frac{1,2}{40 - x(t)}.$$

Logo, $(1,80 - s(t))(40 - x(t)) = 1,2x(t)$. Logo quando $x(t) = 20$ (meio caminho), $s(t) = 3/5$. Derivando obtemos que

$$(-s')(40 - x) + (1,80 - s)(-x') = 1,2x'.$$

Substituindo $x = 20, s = 3/5, x' = -4$ (é negativa pois x diminui quando caminhamos na direção do muro) obtemos que $s' = \dfrac{12}{25} = 0,48m/s$.

14. Se $P = (x_0, y_0)$, a equação da reta tangente t que passa em P é $y - y_0 = -2x_0(x - x_0)$. Como $y_0 = -x_0^2 + 1$, a equação de t é: $y = 1 - x_0^2 - 2x_0(x - x_0)$. O Ponto Q é a interseção de t com o eixo x. Basta colocar $y = 0$ na equação da reta t para se obter que a coordenada x de Q é: $x_0 + \dfrac{1 - x_0^2}{2x_0}$. Note que $M = (x_0, 0)$. Assim, $MQ = \dfrac{1 - x_0^2}{2x_0}$. Logo $MQ'(t) = \dfrac{-2x_0(t)x_0(t)'(2x_0(t)) - (1 - x_0^2)2x_0'(t)}{4x_0(t)^2}$. Simplificando, $MQ'(t) = \dfrac{-4x_0^2(t)x_0'(t) - (1 - x_0^2)2x_0'(t)}{4x_0(t)^2}$. Tomando $x_0 = 1/\sqrt{2}$, obtemos que $MQ'(t) = -3cm/min$.

15. Se $P = (x_0, y_0)$, a equação da reta tangente t que passa em P é $y - y_0 = -\dfrac{1}{x_0^2}(x - x_0)$. Como $y_0 = \dfrac{1}{x_0}$, a equação de t é: $y = \dfrac{1}{x_0} - \dfrac{1}{x_0^2}(x - x_0)$. O Ponto Q é a interseção de t com o eixo x. Basta colocar $y = 0$ na equação da reta t para se obter que a coordenada x de Q é: $2x_0$.

(a) Como $Q = (2x_0, 0)$ (veja contas acima), a distância OP é igual a distância PQ que é igual a $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$.

(b) A altura do triângulo OPQ é igual a y_0 e suas base é $2x_0$. Logo sua área é $2x_0y_0/2 = x_0y_0$. Como $y_0 = \dfrac{1}{x_0}$, a área de OPQ é igual a 1 sempre. Na realidade a taxa de variação é zero, independente da velocidade com que P se desloca.

A.4.5 Derivação Implícita

1. Derivando implicitamente,

$$2x + 2y + 2xy'4y^2y' = 0 \text{ e } 2yy' + 9 - 3(x-2)^2 = 0.$$

Assim substituindo $x = 0$ e $y = 1$ obtemos que $m_1 = -\dfrac{2}{3}$ e $m_2 = \dfrac{3}{2}$.

2. Derivando $h'(x) = 2b\,\mathrm{sen}(x/2)\cos(x/2)(1/2) = b\,\mathrm{sen}(x/2)\cos(x/2)$. Assim, $h'(\pi/2) = b/2$. Derivando implicitamente,

$$y'\cos x + y(-\,\mathrm{sen}\,x) + y + xy' = 5\pi.$$

Substituindo $x = \pi/2$ e $y = 5\pi$ obtemos que $y' = 10$. Assim $10 = y' = h'(\pi/2) = b/2$. Logo, $b = 20$. Precisamos também que $h(\pi/2) = a + b/2 = 5\pi$. Logo, $a + 10 = 5/\pi$.

R: $a = 5\pi - 10$ e $b = 20$.

3. Derivando implicitamente,

$$4y^3y' - 2yy' + 4\cos(xy)(y + xy') = 0.$$

Substituindo $x = 0$ e $y = 1$ obtemos que $y'(0) = -2$.

4. Derivando implicitamente,

$$4xy^2 + 4x^2yy' + 3y^2\cos(\pi x) + y^3(-\,\mathrm{sen}(\pi x)(\pi)) = 0.$$

Substituindo $x = y = 1$ obtemos que $y' = -1/4$. Assim a reta tangente é $y = 5/4 - x/4$.

5. Derivando implicitamente obtemos que

$$2x(\cos y + \operatorname{sen} y) + x^2(-\operatorname{sen} y + \cos y)y' - 2 = 0.$$

(a) Substituindo $x = 1$ e $y = \pi/2$ obtemos que $y' = 0$. Logo $y - \pi/2 = 0(x-1)$. Assim, a reta tangente é $y = \pi/2$.

(b) Escrevendo $ay' = b$, quando $a = 0$, $y' = \pm\infty$, isto é, a reta tangente será vertical. assim isto ocorrerá quando $x^2(-\operatorname{sen} y + \cos y) = 0$, isto é, se $x = 0$ ou $\operatorname{sen} y = \cos y$. Note que $x = 0$ não corresponde a nenhum ponto pois da equação acima teremos $1 = 0$!!!!. Por outro lado, se $\operatorname{sen} y = \cos y$ então $\operatorname{sen} y = \cos y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Substituindo na equação original temos que determinar $x \in \mathbb{R}$ tal que:

$$2x^2(\frac{\pm\sqrt{2}}{2}) - 2x + 1 = 0 = \pm\sqrt{2}x^2 - 2x + 1.$$

São duas equações do segundo grau. Note que as raízes de $\sqrt{2}x^2 - 2x + 1 = 0$ são complexas pois $\Delta < 0$. Assim as soluções são as raízes de $-\sqrt{2}x^2 - 2x + 1 = 0$: $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 + 4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}$. Os y tais que $\operatorname{sen} y = \cos y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ são $y = -\dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.

A.5 Integral

A.5.1 Técnicas Básicas de Integração

1. (a) $\operatorname{sen}(x+3) + C$. (b) $\dfrac{1}{5}\sec(5x) + C$.
(c) $\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C$. (d) $-\dfrac{1}{4}\cos^4\theta + C$.
(e) $\operatorname{sen} x - \dfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C$. (f) $-\dfrac{1}{2}(1 - 2x^2)^{3/2} + C$.

2. (a) $\dfrac{3}{4}(x^2 + 6x)^{2/3} + C$.
(b) $\dfrac{3}{8}(1+x)^{8/3} - \dfrac{3}{5}(1+x)^{5/3} + C$.
(c) $\dfrac{2}{3}(x-1)^{3/2} + 2(x-1)^{1/2} + C$.
(d) $\dfrac{1}{4}\operatorname{arcsen}(4x/5) + C$.
(e) $\dfrac{1}{6}\arctan(2x/3) + C$.
(f) $\dfrac{1}{3}\operatorname{arcsec}(2x/3) + C$.
(g) $\dfrac{1}{3}\operatorname{arcsen}(x^3) + C$.
(h) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}\arctan(\sqrt{3}x^2/3) + C$.
(i) $\operatorname{arcsen}((x+6)/8) + C$.
(j) $\dfrac{1}{2}\arctan((x-2)/2) + C$.

3. (a) $-\dfrac{x}{5}\cos(5x) + \dfrac{1}{25}\operatorname{sen}(5x) + C$.
(b) $-e^{-2x}(x/2 + 1/4) + C$.
(c) $(x-1)\log(1-x) - x + C$.
(d) $e^{1/x}(1 - 1/x) + C$.
(e) $\dfrac{2}{5}e^{2x}\operatorname{sen} x - \dfrac{1}{5}e^{2x}\cos x + C$.
(f) $\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}\log x - \dfrac{4}{9}x\sqrt{x} + C$.
(g) $x\operatorname{arcsen}(x/2) + \sqrt{4 - x^2} + C$.

4. (a) Tome $u = x^2$. R: $\dfrac{1}{2}e^{x^2} + C$.
(b) Tome $u = \operatorname{sen} x$. R: $e^{\operatorname{sen} x} + C$.
(c) Tome $u = \log x$. R: $\dfrac{1}{2}\log^2 x + C$.
(d) Tome $u = x^2 + x + 1$. R: $\log|x^2 + x + 1| + C$.
(e) Tome $u = \log x$. R: $\operatorname{sen}(\log x) + C$.
(f) Tome $u = 4 + t^3$. R: $\dfrac{1}{3}\log|4 + t^3| + C$.

5. (a) Tome $u = 3 + 4e^x$. R: $\dfrac{1}{4}\log(3 + 4e^x) + C$.
(b) Tome $u = \sqrt{x}$. R: $2e^{\sqrt{x}} + C$.
(c) Tome $u = x^2 + 4$. R: $\dfrac{1}{2}\log(x^2 + 4) + C$.
(d) Tome $u = e^x$. Depois observe que $u^2 + 2u + 1 = (u+1)^2$. Tome $v = u + 1$. R: $-\dfrac{1}{e^x + 1} + C$.
(e) Tome $u = e^x$. R: $e^{e^x} + C$.
(f) Tome $u = \log x$. R: $2\sqrt{\log x} + C$.

6. (a) $22/3$. (b) $\dfrac{2}{3}\log 2$.

A.5.2 Teoremas Fundamentais do Cálculo

1. Pelo TFC $g'(x) = (e^x + x)^{1/x}$. Calculamos o limite fazendo $y = (e^x + x)^{1/x}$. Assim $\log y = \dfrac{\log(e^x + x)}{x}$. Calculamos este limite por L'Hospital, e obtemos que é 1. Como $\lim_{x\to+\infty} \log y(x) = 1$, tomando exponencial dos dois lados obtemos que o $\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} g'(x) = e$.

2. Pelo TFC, $f'(x) = \dfrac{x + e^{x^2}}{3 + x^4}$. Fazendo as contas obtemos que $a = 1/6$, $b = 1/3$ e $c = 4$.

3. Derivando os dois lados, pelo TFC, $x^3 f'(x) = 4x^3 \operatorname{sen} x + x^4 \cos x$. Assim, $f'(x) = 4\operatorname{sen} x + x\cos x$. Integrando (por partes o segundo termo) obtemos que $f(x) = x\operatorname{sen} x - 3\cos x + C$. Como $f(\pi) = 5 = 3 + C$, $C = 2$. R: $f(x) = x\operatorname{sen} x - 3\cos x + 2$.

4. Pelo TFC, $f'(x) = \dfrac{e^{x^2} + \cos x}{x^5 + 3}$. Logo $f'(0) = \dfrac{2}{3}$. Como $f(0) = 0$, $f^{-1}(0) = 0$. Pelo teorema da função inversa, $(f^{-1})'(0) = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{3}{2}$.

A.5.3 Integrais Impróprias

1. (a) Como $\int xe^{-x^2}\,dx = -e^{-x^2}/2$, substituindo limites de integração, 0.

(b) Como $\int \frac{\log x}{x^2}\,dx = -\frac{1+\log x}{x}$, substituindo limites de integração, 1.

(c) Como $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$, substituindo limites de integração, π.

(d) Como $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$, substituindo limites de integração, divergente ($+\infty$).

(e) Como $\int e^{2x}\,dx = e^{2x}/2$, substituindo limites de integração, $1/2$.

A.5.4 Integração por Frações Parciais

1. (a) $\frac{1}{6}\log|(x+5)^5(x-1)| + C$.
(b) $\frac{2}{3}\log|x+5| + \frac{1}{3}\log|x-1| + C$.
(c) $x - \frac{1}{x+1} - 2\log|x+1| + C$.
(d) $\frac{3}{4}\log|x-3| + \frac{1}{4}\log|x+1| + C$.
(e) $\frac{1}{4}\log\left(\frac{(x+1)^2}{x^2+1}\right) + \frac{1}{2}\arctan x + C$.
(f) $-\frac{1}{2}\log|x+1| + 2\log|x+2| - \frac{3}{2}\log|x+3| + C$.

2. (a) $-\frac{5}{8}\log|x-1| + \frac{21}{8}\log|x+7| + C$.
(b) $-\log|x+1| + 2\log|x| + C$.
(c) $-\frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{4}\log|x-1| - \frac{1}{4}\log|x+1| + C$.
(d) $\frac{1}{2}\left(\arctan x + \frac{x}{1+x^2}\right) + C$.
(e) $-\frac{4}{x-1} + \frac{1}{2}\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C$.
(f) Faça primeiro a substituição $u = \cos\theta$. Depois integre por partes e obtenha: $\frac{1}{3}\log\left|\frac{2+\cos\theta}{-1+\cos\theta}\right| + C$.
(g) Faça primeiro a substituição $u = e^x$. Depois integre por partes e obtenha: $\log\left(\frac{1+e^x}{2+e^x}\right) + C$.

A.6 Aplicações da Integral

A.6.1 Área no Plano

1. (a) A equação da reta que passa na origem e em $(1,1)$ é $y = x$. A que passa em $(2,1/2)$ é $y = x/4$. Assim a área é igual a

$$\int_0^1 (x - x/4)\,dx + \int_1^2 (1/x - x/4)\,dx = \log 2.$$

(b) O gráfico da função $y = 4$ intersepta $y = 4/x$ em $(1,4)$. Assim a área é igual a

$$\int_0^1 4\,dx + \int_1^4 (4/x)\,dx = 4(1 + 2\log 2).$$

(c) A área é igual a

$$\int_0^1 e^x + \int_1^e (e - \log x)\,dx = e^2 - 2.$$

2. (a) Note que a única raiz real de $x^3 = x + 6$ é $x = 2$. A interseção de $y = x + 6$ e $2y + 2x = 0$ é em $(-4, 2)$. Assim a área é igual a:

$$\int_{-4}^0 (x+6+x/2)\,dx + \int_0^2 (x+6-x^3)\,dx = 12+10 = 22.$$

(b) A interseção das curvas ocorre quando $2y^2 - 4 = y^2$, ou seja, com $y = \pm 2$. Assim a área é igual a

$$\int_{-2}^2 (y^2 - (2y^2 - 4))\,dy = \frac{32}{3}.$$

(c) A interseção de $\sqrt{x}$ e $1/x$ é em $x = 1$. A interseção de $y = 2$ com $1/x$ é em $x = 1/2$ e de $y = 2$ com $\sqrt{x}$ em $x = 4$. Assim a área é igual a:

$$\int_{1/2}^1 (2 - 1/x)\,dx + \int_1^4 (2 - \sqrt{x})\,dx = \\ = 1 - \log 2 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3} - \log 2.$$

(d) $\int_0^\pi (1 + \operatorname{sen} x - \cos(2x))\,dx = \pi + 2.$

3. Nos dois casos será necessário a integração por partes.

(a) $\int x e^{-x}\,dx = (-x-1)e^{-x}$. Calculando a integral em $[0, +\infty)$ obtemos 1.

(b) $\int x^2 e^{-x}\,dx = (-x^2 - 2x - 2)e^{-x}$. $[0, +\infty)$ obtemos 2.

4. Necessário frações parciais para se calcular a integral ou então escrever $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}$. A área será $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} = \frac{\log 4}{2} - \frac{\log 2}{2} = \frac{\log 2}{2}$ ($\log 4 = \log(2^2) = 2\log 2$!).

A.6.2 Volume de Sólidos

1. $\pi\int_a^b (L - f(x))^2\,dx$.

2. Volume do cilindro gerado pela rotação de $x = 1$ em torno do eixo y para $y \in [0, e]$ menos o volume do sólido gerado pela rotação de $x = \log y$ em torno do eixo y para $y \in [1, e]$. Assim o volume será:

$$\pi e - \pi\int_1^e (\log y)^2\,dy = 2\pi.$$

Observe que $\int (\log y)^2\,dy = y(2 + \log^2 y - 2\log y) + C$ (porque?). Portanto, $\int_1^e (\log y)^2\,dy = e - 2$.

3. Será dada pela diferença entre as integrais $\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2} ((2+\cos x) - (-1))^2\,dx$ e

$\pi \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} ((2-\cos x)-(-1))^2\,dx$. Logo o volume é $\dfrac{19\pi^2}{2}+12\pi-\left(\dfrac{19\pi^2}{2}-12\pi\right)=24\pi$.

Pode-se fazer menos contas se observarmos que $(3+\cos x)^2-(3-\cos x)^2=12\cos x$. Assim o volume é $\pi \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 12\cos x\,dx = 24\pi$.

4. A interseção da parábola com a reta é obtida resolvendo-se $y = x^2/(4a) = a$. Logo $x = \pm 2a$. Logo o volume da região será dado por

$$\pi \int_{-2a}^{2a} a^2\,dx - \pi \int_{-2a}^{2a} \frac{x^4}{16a^2}\,dx = \\ = 4\pi a^3 - \frac{4\pi a^3}{5} = 50\pi.$$

Resolvendo obtemos que $a = 5/2$.

5. Note que $W_n = \pi \displaystyle\int_0^1 (x^n)^2\,dx = \frac{\pi}{2n+1}$ e $V_n = \pi \displaystyle\int_0^1 (1-(y^{1/n})^2)\,dx = \frac{2\pi}{n+2}$. Logo, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{V_n}{W_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2(2n+1)}{n+2} = 4$.

6. $\pi \displaystyle\int_1^{+\infty} ((1/x)^2 - e^{-2x})\,dx = \pi\frac{2e^2-1}{2e^2}$.

7. A primitiva de $(xe^{-x})^2 = x^2e^{-2x}$ é obtida integrando-se por partes duas vezes: $\displaystyle\int x^2e^{-2x}\,dx = -\frac{2x^2+2x+1}{4}e^{-2x}$.

Assim o volume é: $\pi \displaystyle\int_0^{+\infty} (xe^{-x})^2\,dx = \frac{\pi}{4}$.

A.6.3 Comprimento de Curvas no Plano

1. Ciclista 1: Como $f'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{(\pi/4)^2-x^2}}$, $1+[f'(x)]^2 = \dfrac{(\pi/4)^2}{(\pi/4)^2-x^2}$. Chamando $r = \pi/4$, calculamos (substituição trigonométrica)

$$\int \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = \int \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx = r\,\mathrm{arcsen}(x/r).$$

Substituindo os limites de integração obtemos que o comprimento percorrido pelo ciclista 1 é $\dfrac{\pi^2}{4} \approx 2,46$.

Ciclista 2: Como $g'(x) = \tan x$, calculamos

$$\int \sqrt{1+\tan^2 x}\,dx = \int \sec\,dx = \log(\sec x + \tan x).$$

Substituindo os limites de integração obtemos que o comprimento percorrido pelo ciclista 2 é $\log\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right) \approx 1,76$.

Logo o que chegará primeiro, por percorrer um percurso menor é o número 2.