UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Matemática
PRIMEIRA PROVA UNIFICADA – CÁLCULO I
POLITÉCNICA E ENGENHARIA QUÍMICA 13/12/2012.

GABARITO

1ª Questão. (*3.0 pontos*).

(**a**) Calcule:

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt[3]{x}\ln x.$$

(**b**) Considere uma função $y = f(x)$ satisfazendo

$$\left| f(x) - \frac{7x^2+5x|x|+2}{x^2+16} \right| \le \frac{1}{x^2},$$

para todo $x \neq 0$. Calcule, para esta função,

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x).$$

(**c**) Calcule a derivada $f'(x)$ se $f(x) = \ln[2+\cos(x^2)]$.

- **Solução.**

(**a**) (*1.0 pontos*) Como $\sqrt[3]{x} \to 0$ e $\ln x \to -\infty$ quando $x \to 0^+$, temos uma indeterminação do tipo $0\cdot\infty$. Usamos a regra de l'Hôpital para obter

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt[3]{x}\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-x^{-4/3}/3} = \lim_{x\to 0^+} -3\sqrt[3]{x} = 0.$$

(**b**) (*1.0 pontos*) A hipótese sobre f significa que

$$\frac{7x^2+5x|x|+2}{x^2+16} - \frac{1}{x^2} \le f(x) \le \frac{7x^2+5x|x|+2}{x^2+16} + \frac{1}{x^2}.$$

Quando $x \to -\infty$ temos que, em particular, podemos restringir o foco a $x < 0$. Assim, para $x < 0$, a desigualdade acima é o mesmo que

$$\frac{7x^2-5x^2+2}{x^2+16} - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^2+2}{x^2+16} - \frac{1}{x^2} \le f(x) \le \frac{7x^2-5x^2+2}{x^2+16} + \frac{1}{x^2} = \frac{2x^2+2}{x^2+16} + \frac{1}{x^2}.$$

Ambas funções de cada lado da desigualdade têm limite igual a 2 quando $x \to -\infty$. Assim, pelo Teorema do Sanduiche, temos

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 2.$$

Por outro lado, quando $x \to +\infty$ temos que, em particular, podemos restringir o foco a $x > 0$. Assim, temos que

$$\frac{7x^2+5x^2+2}{x^2+16} - \frac{1}{x^2} = \frac{12x^2+2}{x^2+16} - \frac{1}{x^2} \le f(x) \le \frac{7x^2+5x^2+2}{x^2+16} + \frac{1}{x^2} = \frac{12x^2+2}{x^2+16} + \frac{1}{x^2}.$$

Analogamente ao resultado anterior,

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 12.$$

(**c**) (*1.0 pontos*) Seja $f(x) = \ln[2 + \cos(x^2)]$. Então, usando a regra da cadeia, obtemos:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2 + \cos(x^2)}\right)(-2x\sin(x^2)).$$

2ª Questão. (*2.0 pontos*).

(**a**) Verifique que, para todo par de pontos x, $y \in (-\pi/2, \pi/2)$, tem-se

$$|\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y| \geq |x - y|.$$

(Dica: use o Teorema do Valor Médio.)

(**b**) Considere a curva definida, implicitamente, pela equação

$$\sqrt{x\,y} = 2(x - y) + x^2 y.$$

Ache o coeficiente angular da reta tangente a esta curva no ponto $(1, 1)$.

- **Solução.**

(**a**) (*1.0 ponto*) Sejam x e y quaisquer números reais em $(-\pi/2, \pi/2)$. Pelo Teorema do Valor Médio temos

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = (\operatorname{tg}'(c))|x - y|,$$

para algum c entre x e y. Mas $\operatorname{tg}'(c) = \sec^2(c) \geq 1$. Assim,

$$|\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y| = |(\sec^2(c))||x - y| \geq |x - y|,$$

para todo par de pontos x, $y \in (-\pi/2, \pi/2)$.

(**b**) (*1.0 ponto*) Primeiro verifiquemos que $(1, 1)$ está nessa curva:

$$\sqrt{1 \cdot 1} = 2(1 - 1) + 1^2 \cdot 1 \Rightarrow (1, 1) \text{ está na curva.}$$

Derivemos implicitamente:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}\sqrt{y} + \sqrt{x}\frac{1}{2\sqrt{y}}y' = 2 - 2y' + 2xy + x^2 y'.$$

Substituindo $x = 1$ e $y = 1$ chegamos a

$$\frac{1}{2} + \frac{y'}{2} = 2 - 2y' + 2 + y'.$$

Resolvendo a equação para encontrar o coeficiente angular da reta tangente a esta curva no ponto $(1, 1)$, obtemos

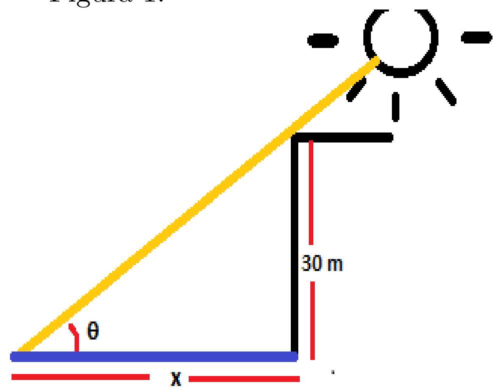
$$y' = \frac{7}{3}.$$

3ª Questão. (*2.0 pontos*).

O sol está se pondo com ângulo de elevação (ângulo entre os raios e uma reta horizontal) que diminui a uma taxa de $0,25$ radianos/hora. Com que velocidade estará crescendo a sombra de um prédio de 30 metros de altura quando o ângulo de elevação do sol for $\dfrac{\pi}{6}$?

- **Solução.** (*2.0 pontos*)

Figura 1:



Vamos chamar de $x = x(t)$ o tamanho da sombra do prédio, que corresponde ao tamanho do segmento de reta horizontal que vai da base do prédio até o ponto de interseção entre os raios solares e o chão. Chamemos de $\theta = \theta(t)$ o ângulo de elevação. Notemos que, quanto menor o ângulo de elevação, mais comprida será a sombra, ou seja, maior será $x = x(t)$. Como a altura do prédio é de 30 metros, então o cateto oposto ao ângulo de elevação mede 30 e o cateto adjacente mede x. Assim, obtemos

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{30}{x}.$$

Derivando implicitamente vem:

$$(\sec^2\theta)\theta'(t) = -\frac{30}{x^2}x'(t).$$

Observemos que, no instante t^* em que o ângulo de elevação do sol for $\frac{\pi}{6}$ teremos $\operatorname{tg}\theta(t^*) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, donde $x(t^*) = 30\sqrt{3}$ metros.

Notemos, ainda, que, por hipótese, $\theta'(t) = -0,25$ radianos/hora; o sinal "$-$"vem do fato que o ângulo de elevação está diminuindo.

Juntando toda a informação obtemos:

$$x'(t^*) = -\frac{\sec^2\left(\frac{\pi}{6}\right)}{30}\theta'(t^*)x^2(t^*) = 30 \ \text{ metros/hora}.$$

Solução alternativa.

Ao escrever

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{30}{x},$$

note que, portanto,

$$x = 30\operatorname{cotg}\theta.$$

Logo temos

$$x' = -30\,(\operatorname{cosec}^2\theta)\theta'.$$

Daí substituimos $\theta = \pi/6$ e $\theta' = -0,25$ rad/h e obtemos o mesmo resultado.

4^{a} **Questão.** (*3.0 pontos*).

Considere $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x^3e^{-x}}$.

(**a**) Verifique que

$$\mathbf{f'(x) = (3x^2 - x^3)e^{-x}} \quad \text{e que} \quad \mathbf{f''(x) = (x^3 - 6x^2 + 6x)e^{-x}}.$$

(**b**) Ache as assíntotas horizontais e verticais caso existam.

(**c**) Identifique os intervalos onde a função é crescente e onde é decrescente.

(**d**) Encontre os valores máximo e mínimo locais e/ou globais caso existam.

(**e**) Identifique os intervalos de concavidade para cima e para baixo e os pontos de inflexão.

(**f**) Usando as informações anteriores faça um esboço do gráfico de $\mathbf{y = f(x)}$.

- **Solução.**

(**a**) (*0.5 pontos*) Usando a regra do produto junto com a regra da cadeia vem:

$$\mathbf{f'(x) = 3x^2e^{-x} - x^3e^{-x} = (3x^2 - x^3)e^{-x}}, \quad \text{e}$$

$$\mathbf{f''(x) = (6x - 3x^2)e^{-x} - (3x^2 - x^3)e^{-x} = (x^3 - 6x^2 + 6x)e^{-x}}.$$

(**b**) (*0.5 pontos*) Precisamos calcular

$$\lim_{\mathbf{x}\to-\infty} \mathbf{f(x)} \quad \text{e} \quad \lim_{\mathbf{x}\to+\infty} \mathbf{f(x)}.$$

Temos:

$$\lim_{\mathbf{x}\to-\infty} \mathbf{f(x)} = -\infty,$$

pois $\mathbf{x^3} \to -\infty$ e $\mathbf{e^{-x}} \to +\infty$ quando $\mathbf{x} \to -\infty$. Continuando,

$$\lim_{\mathbf{x}\to+\infty} \mathbf{f(x)} = \lim_{\mathbf{x}\to+\infty} \frac{\mathbf{x^3}}{\mathbf{e^x}} = \lim_{\mathbf{x}\to+\infty} \frac{\mathbf{3x^2}}{\mathbf{e^x}} = \lim_{\mathbf{x}\to+\infty} \frac{\mathbf{6x}}{\mathbf{e^x}} = \lim_{\mathbf{x}\to+\infty} \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{e^x}} = \mathbf{0},$$

onde usamos três vezes seguidas a regra de l'Hôpital para eliminar a indeterminação do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Assim, há uma assíntota horizontal ao gráfico de $\mathbf{y = f(x)}$ que é a reta $\mathbf{y = 0}$.

Não há assíntotas verticais uma vez que a função $\mathbf{y = f(x)}$ está definida em toda a reta real.

(**c**) (*0.5 pontos*) Notemos que $\mathbf{f}$ é (infinitamente) diferenciável em toda a reta real. Assim, devemos analisar o sinal da primeira derivada para determinar os intervalos de crescimento e decrescimento. Temos:

$$\mathbf{f'(x) = x^2(3 - x)e^{-x}},$$

logo $\mathbf{f'}$ se anula em $\mathbf{x = 0}$, e em $\mathbf{x = 3}$. O sinal é determinado pelo sinal de $\mathbf{3 - x}$ e, portanto, é positivo em $(-\infty, 3)$ e negativo em $(3, +\infty)$.

Assim, $\mathbf{f}$ é **crescente** em $(-\infty, 3)$ e **decrescente** em $(3, +\infty)$.

(**d**) (*0.5 pontos*) Pelo Teste da Primeira Derivada há um único ponto de extremo local, onde a derivada muda de sinal de positivo para negativo na direção $\mathbf{x}$ crescente; donde este ponto é de máximo local: $\mathbf{x = 3}$. O valor máximo local é

$$\mathbf{f(3) = \frac{27}{e^3}}.$$

(e) (*0.5 pontos*) Analisemos o sinal da segunda derivada:

$$\mathbf{f''(x) = x(x^2 - 6x + 6)e^{-x} = x(x - (3 + \sqrt{3}))(x - (3 - \sqrt{3}))e^{-x}}.$$

Temos que $\mathbf{f''}$ é positiva nos intervalos $(0, 3 - \sqrt{3})$ e $(3 + \sqrt{3}, +\infty)$ e negativa nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$.
A conclusão é que o gráfico de $\mathbf{y = f(x)}$ é **côncavo para baixo** em

$$(-\infty, 0) \cup (3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$$

e **côncavo para cima** em

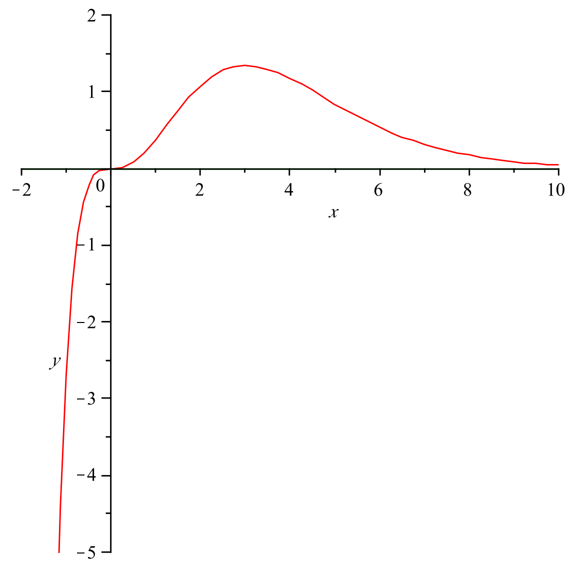
$$(0, 3 - \sqrt{3}) \cup (3 + \sqrt{3}, +\infty).$$

Há três pontos de inflexão:

$$\mathbf{x = 0}, \quad \mathbf{x = 3 - \sqrt{3}}, \quad \text{e} \quad \mathbf{x = 3 + \sqrt{3}}.$$

(f) *(0.5 pontos)*

Figura 2: Gráfico



(a) $y(x) = x^3 e^{-x}$