## Questão 1

Em vez de definir a temperatura $t$ como uma função linear de uma certa propriedade física, podemos definir como a temperatura $t'$ como uma função logarítmica da forma:

$$t' = a\,logX + b$$

Em que $a$ e $b$ são constantes e log $X$ é o logarítmico neperiano da propriedade $X$. Seja $X$ o comprimento da coluna líquida de um termômetro de mercúrio. Tomemos como pontos de referência $X_i = 5\ cm$ e $t'_i = 0^0$, $X_f = 25\ cm$ e $t'_f = 100^0$. Ache as distâncias em centímetros entre os pontos $t' = 0^0$ e $t' = 10^0$ e entre os pontos $t' = 90^0$ e $t' = 100^0$.

**Resolução:**

Vamos utilizar os dados da questão para determinar os parâmetros $a$ e $b$. Assim, teremos:

$$0 = a\,log5 + b \therefore log5 = -\frac{b}{a}$$
(1.1)

E

$$100 = a\,log25 + b$$
$$100 - b = 2a\left(-\frac{b}{a}\right)$$
$$\therefore b = -100$$
(1.2)

Assim, utilizando os resultados de (1.1) e (1.2), a equação toma a seguinte forma:

$$t' = \frac{100}{\log 5}\cdot \log X - 100$$
(1.3)

Para $t' = 10^0$, teremos:

$$10 = \frac{100}{\log 5}\cdot \log X_{10} - 100 \Rightarrow X_{10} = 5^{1,1}\,cm$$
$$\therefore X_{10} - X_0 \cong 0,9cm$$
(1.4)

Para $t' = 90^0$, teremos:

$$90 = \frac{100}{\log 5}\cdot \log X_{90} - 100 \Rightarrow X_{90} = 5^{1,9}\,cm$$
$$\therefore X_{100} - X_{90} \cong 3,72cm$$
(1.5)

## Questão 2

É fato de observação diária que os objetos quentes e frios esfriam ou esquentam, respectivamente, até atingir a temperatura dos corpos vizinhos. Se não for grande a diferença de temperatura $\Delta T$ entre um objeto e sua vizinhança, a taxa de esfriamento ou de aquecimento é aproximadamente proporcional à diferença de temperatura entre o objeto e a vizinhança:

$$\frac{d(\Delta T)}{dt} = -k\Delta T\ ,$$

sendo $k$ uma constante. Aparece o sinal negativo porque $\Delta T$ diminui como o tempo se $\Delta T$ for positivo, e vice-versa. Esta relação é conhecida como Lei de Esfriamento de Newton. (a) De que fatores depende $k$? Quais são sua dimensões?(b) Sendo $\Delta T_0$ a diferença de temperatura em certo instante, demonstre que

$$\Delta T = \Delta T_0 e^{-kt}$$

após o intervalo de tempo $t$.

**Resolução:**

a) A constante k deve depender das características do objeto (superfície exposta, calor específico) e também deve depender do meio (calor específico do meio). Sua unidade é o recíproco da temperatura.

b)

$$\frac{d(\Delta T)}{dt} = -k\Delta T$$

$$\int_{\Delta T_0}^{\Delta T} \frac{d(\Delta T)}{\Delta T} = -\int_0^t k\,dt$$

$$\therefore \Delta T = \Delta T_0 e^{-kt}$$

(2.1)

## Questão 3

Um gás possui uma pressão $p_0$ muito menor do que 1 atm; a temperatura do gás vale $T_0$ = 280 K. O gás sofre um aquecimento isovolumétrico e sua pressão passa para $2p_0$. Calcule a temperatura do gás.

**Resolução:**

$$T(p) = T_0 \frac{p}{p_0}$$

$$T(p) = 280\frac{2p_0}{p_0} = 560K$$

(3.1)

## Questão 4

A que temperatura os seguintes pares de escalas fornecem a mesma leitura? (a) Fahrenheit e Celsius; (b) Fahrenheit e Kelvin; (c) Celsius e Kelvin.

**Resolução:**

a)

$$\frac{T_F - 32}{9} = \frac{T_C}{5}; T_F = T_C = T$$

$$5T - 160 = 9T$$

$$\therefore T = -40^0$$

(4.1)

b)

$$\frac{T_F - 32}{9} = \frac{T_K - 273}{5}; T_F = T_K = T$$

$$5T - 160 = 9T - 2457$$

$$\therefore T = 574^0$$

(4.2)

c) Não há valor.

## Questão 5

No intervalo de 0 a 660⁰C usa-se, para interpolar temperaturas na Escala Internacional Prática, um termômetro de resistência de platina, de características especificadas. A temperatura t é calculada por uma equação que exprime a variação da resistência com a temperatura,

$$R = R_0(1 + At + Bt^2),$$

em que $R_0$, A e B são constantes determinadas no ponto de congelação, no ponto de ebulição e no ponto de fusão do enxofre. (a) Se R = 10000 Ω, no ponto de congelação, R = 13946 Ω no de ebulição e 24817 Ω no do enxofre, determinar $R_0$, A e B. (b) Represente graficamente R em função de t, entre 0 e 660⁰C.

**Resolução:**

a) Para t = 0, temos:

$$R = 10^4 = R_0$$

(5.1)

Agora, para t = 100⁰C, e para t = 444,6⁰C, teremos:

$$10^4 B + 10^2 A = 0{,}3946$$
$$197669{,}16B + 444{,}6A = 1{,}4817$$

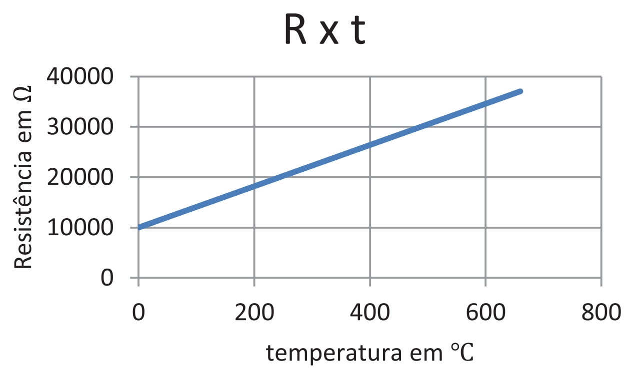
(5.2)

Resolvendo o sistema teremos:

$$A \cong 4{,}1 \cdot 10^{-3}\,°C^{-1}$$
$$B = -1{,}54 \cdot 10^{-6}\,°C^{-2}$$

(5.3)

b)



## Questão 6

Mostre que, se α for considerado variável e dependente da temperatura, então:

$$L = L_0\left[1 + \int_{T_0}^{T}\alpha(T)dT\right],$$

Em que $L_0$ é o comprimento à temperatura de referência $T_0$.

**Resolução:**

Sabemos que a relação entre o coeficiente de dilação é dado por:

$$\frac{dL}{dT} = \alpha \cdot L_0$$
(6.1)

Assim, integrando, teremos:

$$\int_{L_0}^{L} dL = L_0\int_{T_0}^{T}\alpha(T)dT$$

$$L - L_0 = L_0\int_{T_0}^{T}\alpha(T)dT$$

$$\therefore L = L_0\left[1 + L_0\int_{T_0}^{T}\alpha(T)dT\right]$$
(6.2)

## Questão 7

Quando a temperatura de uma moeda se eleva de 100°C, seu diâmetro aumenta de 0,18%. Obtenha, com dois algarismos significativos, o acréscimo correspondente: (a) na área de uma das faces, (b) na espessura, (c) no volume e (d) na massa da moeda. (e) Qual é o seu coeficiente de dilatação linear?

**Resolução:**

a) Para a área temos:

$$A = \frac{\pi D^2}{2}$$
(7.1)

Logo, para variação da área teremos:

$$\Delta A = \frac{\pi[(D_0 + 0{,}0018D_0)^2 - D_0^2]}{2}$$

$$\Delta A = A_0(1{,}0018^2 - 1)$$

$$\Delta A = 0{,}0036A_0 \therefore \Delta A = 0{,}36\%A_0$$
(7.2)

b) Com o resultado de (7.2), podemos encontrar o coeficiente de dilatação linear e assim, determinar a variação na espessura. Logo:

$$\Delta A = A_0 2\alpha\Delta T$$

$$0{,}0036A_0 = A_0 2\alpha \cdot 100$$

$$\alpha = 0{,}000018°\mathrm{C}^{-1}$$
(7.3)

Com o resultado de (7.3), teremos para a variação na espessura:

$$\Delta e = e_0\alpha\Delta T$$

$$\Delta e = e_0 0{,}000018 \cdot 100$$

$$\therefore \Delta e = 0{,}18\%e_0$$
(7.4)

O resultado (7.4) já era esperado, pois o diâmetro também sofreu esse tipo de variação.

c) Para o volume, teremos:

$$\Delta V = V_0 3\alpha\Delta T$$

$$\therefore \Delta V = 0{,}54\%V_0$$
(7.5)

d) Não é esperado variação na massa com a variação de temperatura.

e) Vide resultado (7.3).

## Questão 8

Seja ρ a massa específica de um material homogêneo. Como o volume varia com a temperatura, concluímos que a massa específica também varia com a temperatura. (a) Obtenha uma expressão para o coeficiente β em função da taxa de variação $d\rho/dT$. (b) Determine Δρ para pequenas variações de temperaturas.

**Resolução:**

a) Tomemos a expressão para a massa específica:

$$\rho = \frac{m}{V}$$
(8.1)

Agora, tomando a taxa de variação com a temperatura, teremos:

$$\frac{d\rho}{dT} = -\frac{m}{V^2} \cdot \frac{dV}{dT}$$
(8.2)

Mas, como a taxa de variação do volume com a temperatura é dada por:

$$\frac{dV}{dT} = V \cdot \beta$$
(8.3)

Substituindo em (8.2), teremos:

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dT}$$
(8.4)

b) Podemos agora tomar o resultado (8.4). Logo:

$$\int_{\rho_0}^{\rho} d\rho = -\beta\rho_0 \int_{T_0}^{T} dT$$

$$\therefore \Delta\rho = -\beta\rho_0 \Delta T$$
(8.5)

## Questão 9

(a) Provar que, se os comprimentos de duas barras de sólidos diferentes forem inversamente proporcionais aos respectivos coeficientes de dilatação linear, em certa temperatura inicial, a diferença de comprimento entre elas será constante em todas as temperaturas. (b) Quais seriam os comprimentos de uma barra de aço e outra de latão, a 0°C, para que a diferença entre eles se mantivesse igual a 0,30 m a todas as temperaturas?

**Resolução:**

a) Sejam $L_1$ e $L_2$ os comprimentos das duas barras.

$$L_1 - L_2 = constante$$
(9.1)

Mas as expressões para a variação dos comprimentos em função da temperatura são dadas por:

$$L_1 = L_{01} + L_{01}\alpha_1\Delta T$$
e
$$L_2 = L_{02} + L_{02}\alpha_2\Delta T$$
(9.2)

Agora, substituindo as expressões de (9.2) em (9.1), teremos:

$$L_{01} - L_{02} + (L_{01}\alpha_1 - L_{02}\alpha_2)\Delta T = constante$$

Mas

$$L_{01} - L_{02} = constante$$

Logo, para qualquer variação de temperatura, temos:

$$L_{01}\alpha_1 - L_{02}\alpha_2 = 0$$

$$\therefore \frac{L_{01}}{\alpha_2} = \frac{L_{02}}{\alpha_1}$$
(9.3)

b) Os coeficientes de dilatação do aço e do latão são respectivamente: $\alpha_1 = 11 \cdot 10^{-6} °C^{-1}$ e $\alpha_2 = 19 \cdot 10^{-6} °C^{-1}$. Assim sendo, teremos:

$$L_{01} - L_{02} = 0{,}30$$
(9.4)

Utilizando a relação (9.3), teremos:

$$11L_{01} = 19L_{02}$$
(9.5)

Agora substituindo (9.5) em (9.4), teremos:

$$L_{01} \cong 0{,}71m \; e \; L_{02} \cong 0{,}41m.$$
(9.6)

## Questão 10

Consideremos um termômetro de mercúrio-em-vidro. Suponhamos que a seção transversal do capilar seja constante, $A_0$, e que $V_0$ seja o volume do tubo do termômetro a 0,00°C. Se o mercúrio for exatamente suficiente para encher o tubo a 0,00°C, provar que o comprimento da coluna de mercúrio no capilar, à temperatura $t$, será:

$$l = \frac{V_0}{A_0}(\beta - 3\alpha)t,$$

ou seja, é proporcional à temperatura; β é o coeficiente de dilatação volumétrica do mercúrio e α o de dilatação linear do vidro.

**Resolução:**

Seja a dilatação volumétrica do mercúrio:

$$\Delta V_{Hg} = V_0 \beta \Delta T$$
(10.1)

Em que $\Delta V_{Hg} = A_0 \Delta l_{Hg}$. Assim, (10.1) fica:

$$l_{Hg} = l_{0Hg} + \frac{V_0}{A_0}\beta_{Hg}\Delta T$$
(10.2)

Para a dilatação volumétrica do capilar teremos:

$$\Delta V_C = V_0 3\alpha \Delta T$$
(10.3)

Em que $\Delta V_C = A_0 \Delta l_C$. Logo, (10.3) fica:

$$l_C = l_{0C} + \frac{V_0}{A_0} 3\alpha \Delta T$$
(10.4)

Para a altura da coluna de mercúrio, teremos de (10.2) e (10.4):

$$l = l_{Hg} - l_C = l_{0Hg} - l_{0C} + \frac{V_0}{A_0}(\beta_{Hg} - 3\alpha)\Delta t$$
(10.5)

Levando em consideração que para t = 0,00°C o mercúrio era suficiente para encher o tubo, ou seja, $l_{0Hg} = l_{0C}$, teremos para (10.5)

$$l = l_{Hg} - l_C = \frac{V_0}{A_0}(\beta_{Hg} - 3\alpha)t.$$
(10.6)

## Questão 11

(a) Provar que a variação, com a temperatura, no momento de inércia $I$ de um corpo sólido é $\Delta I = 2\alpha I \Delta T$. (b) Provar que a variação do período, $t$, de um pêndulo físico com a temperatura é $\Delta t = \frac{1}{2}\alpha t \Delta T$.

**Resolução:**

a) Para a taxa de variação do momento de inércia, com a temperatura, temos:

$$\frac{dI}{dT} = \frac{2I_0}{r} \cdot \frac{dr}{dT}$$
(11.1)

Mas, $\alpha = \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{dT}$. Assim para (11.1) teremos:

$$\frac{dI}{dT} = 2\alpha I_0$$
(11.2)

Integrando (11.2) teremos:

$$\Delta I = 2\alpha I_0 \Delta T$$
(11.3)

b) Para o período de um pêndulo físico temos:

$$t = 2\pi \left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$$
(11.4)

Agora, tomando a taxa de variação com a temperatura, teremos:

$$\frac{dt}{dT} = \frac{2\pi}{2} \cdot \frac{1}{(lg)^{1/2}} \cdot \frac{dl}{dT}$$
(11.5)

Mas, $\alpha = \frac{1}{l} \cdot \frac{dl}{dT}$. Logo, teremos para (11.5):

$$\frac{dt}{dT} = 2\pi \cdot \left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\alpha}{2}$$
(11.6)

Integrando, teremos:

$$\Delta t = \frac{1}{2} \cdot t_0 \alpha \Delta T$$
(11.7)

## Questão 12

Um cubo de alumínio, com aresta igual a 20 cm flutua em mercúrio. De quanto o bloco imergirá quando a temperatura aumentar de 270 K para 370 K? (O coeficiente de dilatação volumétrica do mercúrio é $1{,}8 \cdot 10^{-4}°C^{-1}$).

**Resolução:**

Para o cubo de alumínio flutuar na água temos:

$$m_{Al} \cdot g = \rho_{Hg} \cdot g \cdot V_{LD}$$
(12.1)

Assim, o volume do cubo submerso (que é igual ao volume de líquido deslocado) é dado por:

$$V_{Sub} = V_{LD} = \frac{m_{Al}}{\rho_{Hg}}$$
(12.2)

Com a variação de temperatura (100 K = 100°C), a densidade do mercúrio diminuirá. Utilizando a relação (8.5), poderemos encontrar a nova densidade do mercúrio. Assim, teremos:

$$\Delta\rho_{Hg} = -\rho_{0Hg}\beta_{Hg}\Delta T$$

$$\Delta\rho_{Hg} = -13{,}6 \cdot 10^3 \cdot 1{,}8 \cdot 10^{-4} \cdot 10^2$$

$$\Delta\rho_{Hg} = -2{,}45 \cdot 10^3 kg \cdot m^{-3}$$

$$\therefore \rho'_{Hg} = 11{,}15 \cdot 10^3 kg \cdot m^{-3}$$
(12.3)

Assim, da relação (12.2), o novo volume de líquido deslocado será:

$$V'_{Sub} = V'_{LD} = \frac{m_{Al}}{\rho'_{Hg}}$$
(12.4)

A diferença de volumes será então:

$$\Delta V_{Sub} = m_{Al}\left(\frac{1}{\rho'_{Hg}} - \frac{1}{\rho_{Hg}}\right)$$

$$\Delta V_{Sub} = \frac{0{,}0127}{10^3} \cdot m_{Al}$$
(12.5)

Agora, das relações (12.2) e (12.5), teremos:

$$\frac{\Delta V_{Sub}}{V_{Sub}} = 13{,}6 \cdot 0{,}0127 \cong 17\%$$
(12.6)

Podemos imaginar que o volume do cubo sofra variação. Assim, pode-se escrever:

$$\Delta V_{Al} = 8 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 23 \cdot 10^{-6} \cdot 10^2$$
$$\therefore V_{Al} = 8055{,}2\, cm^3$$
(12.7)

Para um cubo maciço, podemos determinar a massa utilizando a massa específica do alumínio. Então:

$$m_{Al} = 2{,}7 \cdot 8 \cdot 10^3 = 21600 g = 21{,}6\, kg$$
(12.8)

Utilizando a relação (12.2), temos para o volume submerso inicial:

$$V_{Sub} = \frac{21600}{13{,}6} = 1588{,}2\, cm^3$$
(12.9)

Assim, a parte emersa vale:

$$8000 - 1588{,}2 = 6411{,}8\, cm^3$$
(12.10)

Agora, para a temperatura de 370 K, utilizando a expressão (12.4), teremos:

$$V'_{LD} = \frac{21600}{11{,}15} = 1937{,}2\ cm^3$$
(12.11)

Isso resulta para a parte emersa:

$$8055{,}2 - 1937{,}2 = 6118\ cm^3$$
(12.12)

Agora comparando com o resultado de (12.10), teremos:

$$\frac{6411{,}8 - 6118}{6411{,}8} = 4{,}5\%.$$
(12.13)

## Questão 13

O volume de um sistema é dado em função da temperatura pela fórmula:

$$V = V_0 e^{3\cdot 10^{-3} T}$$

Determine o coeficiente de dilatação volumétrica deste sistema.

**Resolução:**

De acordo com a definição para o coeficiente de dilatação volumétrica, teremos:

$$\beta = \frac{1}{V}\cdot\frac{dV}{dT}$$

$$\beta = \frac{1}{V}\cdot V_0 e^{3\cdot 10^{-3} T}\cdot 3\cdot 10^{-3}$$

$$\therefore \beta = 3\cdot 10^{-3}\ K^{-1}$$
(13.1)